

8–9 КЛАСИ

1. Точки A , B і C так розташовані на прямій, що $CA = AB$. Квадрат $ABDE$ і рівносторонній трикутник CFA побудували в одній півплощині відносно прямої CB . Знайдіть гострий кут між прямими CE і BF .

2. В трикутнику ABC $\angle B = 2\angle C$, AD — висота, M — середина сторони BC . Доведіть, що $AB = 2DM$.

3. Побудуйте трикутник ABC за висотою та бісектрисою кута A , якщо відомо, що між сторонами трикутника ABC виконується рівність $2BC = AB + AC$.

4. Нехай точка I_a — центр зовнішнього кола трикутника ABC , яке дотикається до сторони BC . Нехай W — точка перетину бісектриси кута $\angle A$ трикутника ABC з описаним навколо нього колом. Перпендикуляр, опущений з точки W на пряму AB , перетинає описане навколо трикутника ABC коло в точці P . Доведіть, що якщо точки B , P , I_a лежать на одній прямій, то трикутник ABC — рівнобедрений.

5. Точка M лежить всередині ромба $ABCD$. Відомо, що $\angle DAB = 110^\circ$, $\angle AMD = 80^\circ$, $\angle BMC = 100^\circ$. Чому може дорівнювати величина кута AMB ?

6. Дано трикутник ABC , в якому $AB = BC$. Точка O — центр описаного кола, точка I — центр вписаного кола трикутника. Точка D лежить на стороні BC , причому прямі DI та AB паралельні. Доведіть, що прямі DO і CI перпендикулярні.

17 лютого 2018 р.

10–11 КЛАСИ

1. У тетраедрі $SABC$ точки E, F, K, L — відповідно середини ребер SA, BC, AC, SB . Довжини відрізків EF і KL відповідно дорівнюють 11 см і 13 см, а довжина ребра AB — 18 см. Знайдіть довжину ребра SC тетраедра.

2. Дано гострокутний трикутник ABC . Пряма, яка паралельна BC , перетинає сторони AB і AC в точках M і P відповідно. При якому розташуванні точок M і P радіус кола, описаного навколо трикутника BMP , буде найменшим?

3. Точка O — центр описаного кола ω рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$). Бісектриса кута C перетинає ω в точці W . Точка Q — центр описаного кола трикутника OWB . Відновіть трикутник ABC за точками Q, W, B .

4. Нехай точка I_a — центр зовнішнього кола трикутника ABC , яке дотикається до сторони BC . Нехай W — точка перетину бісектриси кута $\angle A$ трикутника ABC з описаним навколо нього колом. Перпендикуляр, опущений з точки W на пряму AB , перетинає описане навколо трикутника ABC коло в точці P . Доведіть, що якщо точки B, P, I_a лежать на одній прямій, то трикутник ABC — рівнобедрений.

5. Вписане коло трикутника ABC дотикається до його сторін AB, BC, CA відповідно в точках K, N, M . Відомо, що $\angle ANM = \angle CKM$. Доведіть, що трикутник ABC — рівнобедрений.

6. Нехай O та I — відповідно центри описаного та вписаного кіл гострокутного трикутника ABC . Відомо, що пряма OI паралельна до сторони BC цього трикутника. Пряма MI , де M — середина BC , перетинає висоту AH в точці T . Знайдіть довжину відрізка IT , якщо радіус кола, вписаного в трикутник ABC , дорівнює r .

17 лютого 2018 р.