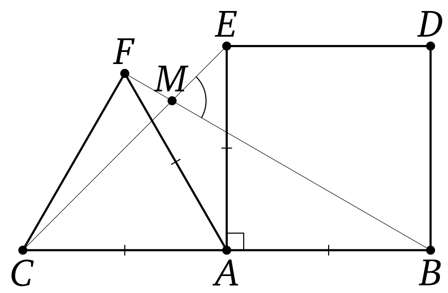
8–9 класи

1. Точки A, B і C так розташовані на прямій, що $CA = AB$. Квадрат $ABDE$ і рівносторонній трикутник CFA побудували в одній півплощині відносно прямої CB. Знайдіть гострий кут між прямими CE і BF.

Розв'язання.

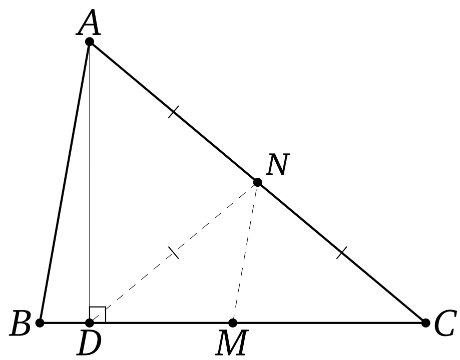


Позначимо через M точку перетину CE і BF. Тоді шуканий кут EMB є зовнішнім кутом трикутника CMB і дорівнює сумі кутів $\angle MCB$ і $\angle MBC$. Але з рівнобедреного прямокутного трикутника CAE знаходимо, що $\angle MCB = 45°$, а з рівнобедреного трикутника FAB знаходимо, що $\angle MBC = \angle AFB = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$. Таким чином, $\angle EMB = 45° + 30° = 75°$.

Відповідь. 75°.

2. В трикутнику ABC $\angle B = 2\angle C$, AD — висота, M — середина сторони BC. Доведіть, що $AB = 2DM$.

Розв'язання.



Нехай N — середина сторони AC. Проведемо відрізки MN, DN. Оскільки MN — середня лінія трикутника ABC, то $AB = 2MN$, а тому достатньо довести, що $DM = MN$.

Оскільки DN — медіана прямокутного трикутника, яка проведена до гіпотенузи, то $DN = AN = NC$ і $\angle NDC = \angle C$. Оскільки $MN \parallel AB$, то $\angle NMC = \angle B = 2\angle C$. Тоді кут NMC є зовнішнім кутом трикутника DMN, а значить $\angle DNM = \angle C$. Таким чином, трикутник DMN є рівнобедреним, $DM = MN = \frac{1}{2}AB$, що і потрібно було довести.

Примітка. На рисунку зображено гострокутний трикутник, у якого точка D належить стороні BC. Наведені міркування не залежать від виду трикутника і справедливі для випадків, коли $\angle B$ є прямим або тупим.

3. Побудуйте трикутник ABC за висотою та бісектрисою кута A, якщо відомо, що між сторонами трикутника ABC виконується рівність $2BC = AB + AC$.

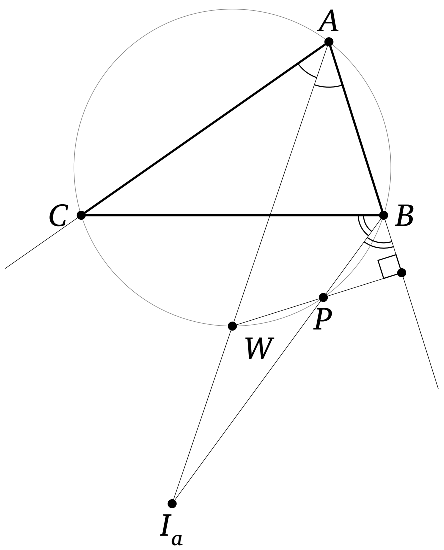
(*Олексій Карлюченко*)

Розв'язання. Побудуємо трикутник ATH за катетом і гіпотенузою (AH — висота, AT — бісектриса). Нехай I — інцентр трикутника ABC. Відомо, що інцентр ділить бісектрису AT у відношенні $\frac{AI}{IT} = \frac{AB+AC}{BC}$. В нашому випадку це відношення дорівнює $2:1$. Тому можемо побудувати точку I. Опустимо з неї перпендикуляр на пряму TH — отримаємо відрізок, який дорівнює радіусу вписаного кола. Будуємо це коло з центром в точці I. З точки A проводимо дотичні до неї. Вони перетнуть пряму TH в шуканих вершинах B і C.

4. Нехай точка I_a — центр зовнівписаного кола трикутника ABC, яке дотикається до сторони BC. Нехай W — точка перетину бісектриси кута $\angle A$ трикутника ABC з описаним навколо нього колом. Перпендикуляр, опущений з точки W на пряму AB, перетинає описане навколо трикутника ABC коло в точці P. Доведіть, що якщо точки B, P, I_a лежать на одній прямій, то трикутник ABC — рівнобедрений.

(*Микола Мороз*)

Розв'язання. Оскільки B, P, I_a лежать на одній прямій, причому P та I_a по один бік від точки B, то $\angle CBP = \angle CBI_a$.



З одного боку, $\angle CBI_a = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B) = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$.

З іншого боку, $\angle AWP = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$, а тому $\angle ABP = 180^\circ - \angle AWP$, оскільки чотирикутник $ABPW$ — вписаний. Тоді

$$\angle CBP = \angle ABP - \angle B = 180^\circ - \angle AWP - \angle B = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\angle A}{2} - \angle B =$$
$$= 90^\circ + \frac{\angle A}{2} - \angle B.$$

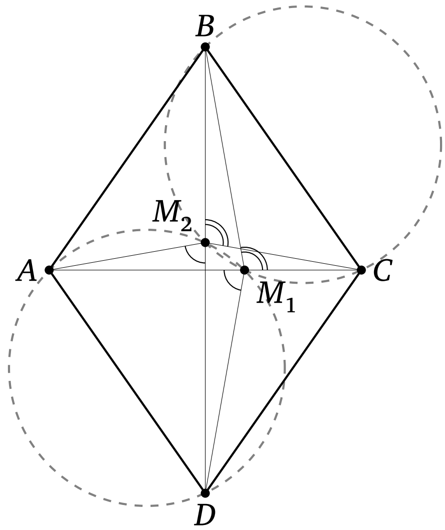
В силу рівності $\angle CBP = \angle CBI_a$:

$$90^\circ - \frac{\angle B}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2} - \angle B,$$

звідки $\angle A = \angle B$, а тому $BC = AC$.

5. Точка M лежить всередині ромба $ABCD$. Відомо, що $\angle DAB = 110^\circ$, $\angle AMD = 80^\circ$, $\angle BMC = 100^\circ$. Чому може дорівнювати величина кута AMB?

Розв'язання.



Помітимо, що геометричне місце точок M, з яких відрізок AD видно під кутом 80°, і які лежать по ту ж сторону від AD, що і точка B — це дуга кола, що проходить через точки A і D. Також геометричне місце точок M, з яких відрізок BC видно під кутом 100°, і які лежать по ту ж сторону від BC, що і точка A — це дуга кола, що проходить через точки B і C. Шукана точка M повинна лежати на перетині цих дуг. Таким чином, таких точок не може бути більше двох.

Покажемо дві точки, які задовольняють умові задачі. Перша точка M_1 лежить на діагоналі AC, причому $\angle BM_1C = 100^\circ$. Тоді $\angle BM_1A = 180^\circ - \angle BM_1C = 80^\circ$. Із рівності трикутників AM_1B і AM_1D випливає, що $\angle AM_1D = 80^\circ$, що і вимагається в умові.

Аналогічно друга точка M_2 лежить на діагоналі BD, причому $\angle BM_2C = 100^\circ$. В цьому випадку знаходимо: $\angle AM_2D = 80^\circ$, $\angle AM_2B = 100^\circ$.

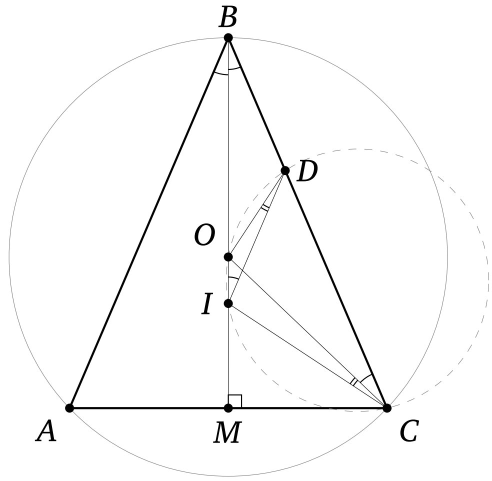
Залишається відмітити, що точки M_1 і M_2 є різними (вони лежать на різних діагоналях ромба і не співпадають із точкою перетину діагоналей) і лежать всередині ромба $ABCD$.

Відповідь. 80° або 100°.

6. Дано трикутник ABC, в якому $AB = BC$. Точка O — центр описаного кола, точка I — центр вписаного кола трикутника. Точка D лежить на стороні BC, причому прямі DI та AB паралельні. Доведіть, що прямі DO і CI перпендикулярні.

(*В'ячеслав Ясінський*)

Розв'язання.



Нехай $\angle A = \angle C = \alpha$, тоді $\angle OBC = \angle ABO = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. З паралельності AB і DI випливає, що $\angle DIB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Крім того, з рівнобедреного трикутника BOC знаходимо, що $\angle BCO = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Таким чином, точки I, O, D, C лежать на одному колі.

Далі, $\angle BCI = \frac{\alpha}{2}$, тому $\angle OCI = \frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \alpha) = \frac{3}{2}\alpha - 90^\circ$, а з циклічності точок I, O, D, C випливає, що і $\angle ODI = \frac{3}{2}\alpha - 90^\circ$. Також $\angle IDC = 2(90^\circ - \alpha) = 180^\circ - 2\alpha$ (як зовнішній кут трикутника BDI). Маємо:

$$\angle ODC + \angle ICD = (\frac{3}{2}\alpha - 90^\circ) + (180^\circ - 2\alpha) + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ,$$

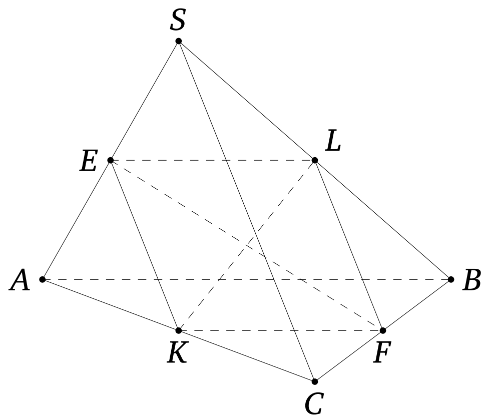
а це і означає, що прямі DO і CI перпендикулярні.

Примітка. У випадку іншого розміщення точок O та I на прямій BM доведення проводиться аналогічними міркуваннями.

10–11 класи

1. У тетраедрі $SABC$ точки E, F, K, L — відповідно середини ребер SA, BC, AC, SB. Довжини відрізків EF і KL відповідно дорівнюють 11 см і 13 см, а довжина ребра AB — 18 см. Знайдіть довжину ребра SC тетраедра.

Розв'язання.



Розв'язання. Розглянемо чотирикутник $ELFK$. Оскільки $EL = \frac{1}{2}AB = 9$ см, $EL \parallel AB$ (як середня лінія у трикутнику SAB), $KF = \frac{1}{2}AB = 9$ см, $KL \parallel AB$ (як середня лінія у трикутнику ABC), то $EL = KF$ і $EL \parallel KF$, тобто чотирикутник $ELFK$ — паралелограм. Тоді з формули $EF^2 + KL^2 = 2(KE^2 + KF^2)$ знаходимо, що $KE^2 = \frac{1}{2}(EF^2 + KL^2 - 2KF^2) = \frac{1}{2}(11^2 + 13^2 - 2 \cdot 9^2) = 64$, тобто $KE = 8$ см. Але KE є середньою лінією у трикутнику SAC, тому $SC = 2KE = 16$ см.

Відповідь. 16 см.

2. Дано гострокутний трикутник ABC. Пряма, яка паралельна BC, перетинає сторони AB і AC в точках M і P відповідно. При якому розташуванні точок M і P радіус кола, описаного навколо трикутника BMP, буде найменшим?

Розв'язання. Нехай $\angle ABC = \beta$, а радіус кола, описаного навколо трикутника BMP дорівнює R. Тоді за теоремою синусів для трикутника BMP:

$$R = \frac{BP}{2\sin\angle BMP} = \frac{BP}{2\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{BP}{2\sin\beta}.$$

Оскільки β — величина стала, то найменше значення R буде в тому випадку, коли BP є найменш можливим. Отже, BP — висота трикутника.

3. Точка O — центр описаного кола ω рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$). Бісектриса кута C перетинає ω в точці W. Точка Q — центр описаного кола трикутника OWB. Відновіть трикутник ABC за точками Q, W, B.

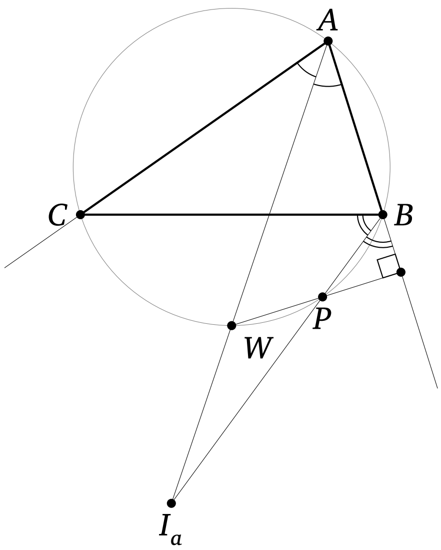
(*Андрій Мостовий*)

Розв'язання. Будуємо коло з центром в точці Q радіуса $QB = QW$. Серединний перпендикуляр до відрізка WB перетинає це коло в точці O. Далі можемо побудувати коло ω з центром в точці O радіуса OB. З точки W розхилом циркуля, який дорівнює BW, робимо засічку на колі ω — отримуємо вершину A (оскільки W — точка перетину бісектриси кута ACB з описаним колом, то $WA = WB$). Проводимо пряму AO. З вершини B проводимо пряму, перпендикулярну до AO; отримаємо точку M — середину BC. Останню вершину C знаходимо відклавши на прямій BM відрізок $MC = MB$.

4. Нехай точка I_a — центр зовнівписаного кола трикутника ABC, яке дотикається до сторони BC. Нехай W — точка перетину бісектриси кута $\angle A$ трикутника ABC з описаним навколо нього колом. Перпендикуляр, опущений з точки W на пряму AB, перетинає описане навколо трикутника ABC коло в точці P. Доведіть, що якщо точки B, P, I_a лежать на одній прямій, то трикутник ABC — рівнобедрений.

(*Микола Мороз*)

Розв'язання. Оскільки B, P, I_a лежать на одній прямій, причому P та I_a по один бік від точки B, то $\angle CBP = \angle CBI_a$.



З одного боку, $\angle CBI_a = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B) = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$.

З іншого боку, $\angle AWP = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$, а тому $\angle ABP = 180^\circ - \angle AWP$, оскільки чотирикутник $ABPW$ — вписаний. Тоді

$$\angle CBP = \angle ABP - \angle B = 180^\circ - \angle AWP - \angle B = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\angle A}{2} - \angle B =$$
$$= 90^\circ + \frac{\angle A}{2} - \angle B.$$

В силу рівності $\angle CBP = \angle CBI_a$:

$$90^\circ - \frac{\angle B}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2} - \angle B,$$

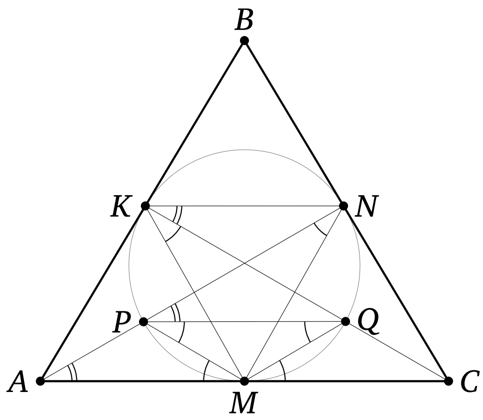
звідки $\angle A = \angle B$, а тому $BC = AC$.

5. Вписане коло трикутника ABC дотикається до його сторін AB, BC, CA відповідно в точках K, N, M. Відомо, що $\angle ANM = \angle CKM$. Доведіть, що трикутник ABC — рівнобедрений.

(*В'ячеслав Ясінський*)

Розв'язання.

Нехай прямі AN і CK перетинають вдруге вписане коло трикутника ABC у точках P і Q відповідно. Тоді, за теоремою про вписаний кут та кут між дотичною і хордою, що проведена в точку дотику, одержуємо:



$$\angle PNM = \angle PQM = \angle PMA,$$

$$\angle QKM = \angle QPM = \angle QMC.$$

За умовою задачі $\angle PNM = \angle QKM$, тому $PQ \parallel AC$. Звідси випливає, що

$$\angle CAN = \angle QPN = \angle QKN = \angle CKN,$$

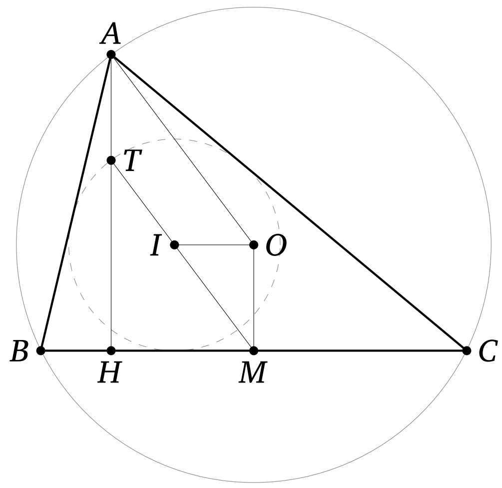
тобто $\angle CAN = \angle CKN$. Це означає, що чотирикутник $AKNC$ — вписаний, тобто $\angle CAK = \angle BNK$ і $\angle ACN = \angle BKN$. За теоремою про дотичні, трикутник KBN — рівнобедрений, тобто $\angle BNK = \angle BKN$, тоді $\angle CAK = \angle ACN$.

Таким чином, $\angle CAB = \angle ACB$, тобто трикутник ABC — рівнобедрений.

6. Нехай O та I — відповідно центри описаного та вписаного кіл гострокутного трикутника ABC. Відомо, що пряма OI паралельна до сторони BC цього трикутника. Пряма MI, де M — середина BC, перетинає висоту AH в точці T. Знайдіть довжину відрізка IT, якщо радіус кола, вписаного в трикутник ABC, дорівнює r.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання.



Оскільки OI паралельно BC, то, $OM = r$. З формули Ейлера $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Тоді за теоремою Піфагора для трикутника IOM: $MI^2 = OI^2 + OM^2 = R^2 - 2Rr + r^2 = (R-r)^2$, тобто $MI = R - r$.

Для подальшого доведення використаємо той факт, що якщо у довільному трикутнику ABC точка M — середина BC, I — центр вписаного кола, то пряма MI відтинає на висоті AH відрізок AT, довжина якого дорівнює радіусу кола, вписаного в трикутник ABC. Тоді чотирикутник $ATMO$ є паралелограмом, і, отже, $TM = AO = R$. Тоді $IT = MT - MI = R - (R - r) = r$, що і потрібно було довести.

Доведення допоміжного факту. Проведемо дотичну EF до вписаного кола, яка паралельна стороні BC і позначимо через D — точку дотику, KD — діаметр вписаного кола. Тоді точка D є центром зовнівписаного кола трикутника AEF. Продовживши пряму AD до перетину із стороною BC одержимо точку N. Оскільки трикутники ABC і AEF гомотетичні з центром гомотетії в точці A, то точка N — центр зовнівписаного кола трикутника ABC. Але точки D і N симетричні відносно точки M ($BK = CN = p - b$), тому MI — середня лінія в трикутнику KDN, тому $MI \parallel AD$. Отже, чотирикутник $ATID$ — паралелограм і $AT = ID = r$.