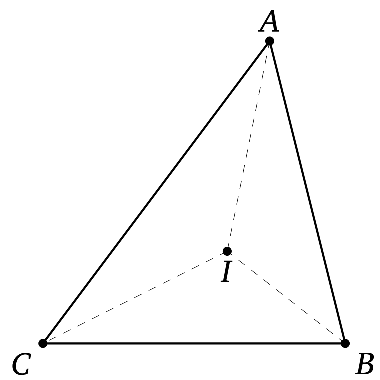
8–9 класи

1. Відомо, що в трикутнику ABC відстані від точки перетину бісектрис до кожної з вершин трикутника не перевищують діаметра вписаного в цей трикутник кола. Знайдіть кути трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання. Припустимо, що відстані від інцентра I до вершин трикутника ABC менші за діаметр вписаного кола, тобто $IA < 2r$, $IB < 2r$, $IC < 2r$ (r — радіус вписаного кола).

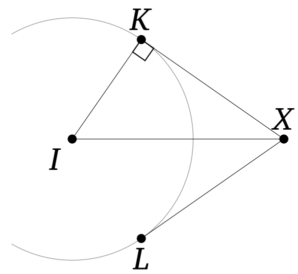
Тоді коло s з центром в точці I радіуса $2r$ накриває весь трикутник ABC, тобто воно є більшим, ніж коло ω, описане навколо трикутника ABC. Але у такому випадку порушується нерівність $R \geq 2r$.



Нехай $IA = 2r$, а $IB < 2r$ та $IC < 2r$. В цьому разі коло s_1 з центром в точці I радіуса $IA = 2r$ знов-таки буде "виходити" за вершини B і C і буде більшим за коло ω, яке описане навколо трикутника ABC.

Отже, можливим є єдиний випадок: $IA = IB = IC = 2r$, що досягається лише в рівносторонньому трикутнику, коли $R = 2r$. Таким чином, кути трикутника ABC дорівнюють $60°, 60°, 60°$.

Другий спосіб. Доведемо таке твердження: якщо точка X віддалена від центра I кола радіуса r на відстань $d \leq 2r$ ($d > r$), то кут між дотичними, проведеними з цієї точки до кола, не менший за $60°$.



Справді, позначимо K і L точки дотику. Тоді $\sin \angle KXI = \frac{IK}{IX} \geq \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$. Тоді $\angle KXI \geq 30°$, а тому і $\angle KXL \geq 60°$.

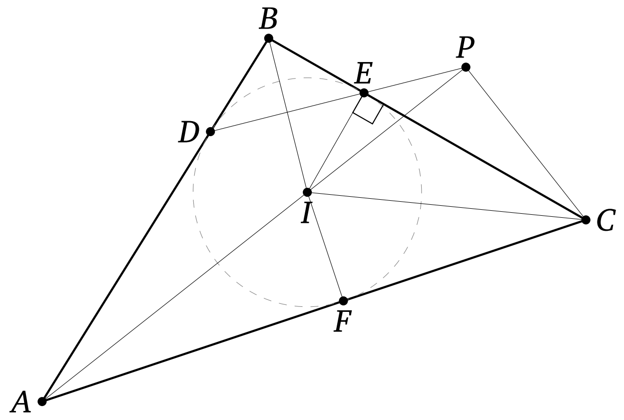
Отже, усі кути трикутника не менші від $60°$, а це можливо лише коли він рівносторонній.

Відповідь. $60°, 60°, 60°$.

2. Дано різносторонній трикутник ABC. Відомо, що I — центр вписаного кола в цей трикутник, точки D, E, F — точки дотику цього кола до сторін AB, BC, CA відповідно. Нехай P — точка перетину прямих DE і AI. Доведіть, що $CP \perp AI$.

(*Віталій Ветров*)

Розв'язання. Для доведення того, що $CP \perp AI$ достатньо показати, що точки C, I, E, P лежать на одному колі (оскільки $\angle IEC = 90°$). Позначимо кути трикутника 2α, 2β, 2γ. Тоді $\angle CAI = \angle IAB = \alpha$, $\angle ABI = \angle IBC = \beta$, $\angle BCI = \angle ICA = \gamma$; $\alpha + \beta + \gamma = 90°$.



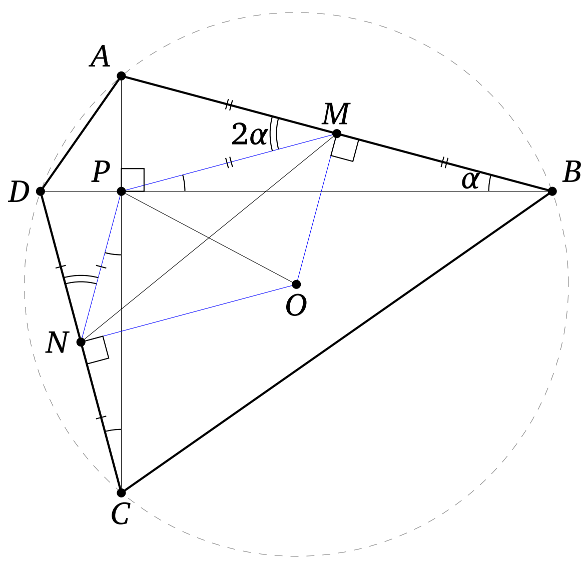
Трикутник DBE рівнобедрений ($BD = BE$ як дотичні проведені з точки B до вписаного кола). Тоді $\angle BDE = 90^\circ - \beta$, $\angle ADP = 90^\circ + \beta$. З трикутника ADP знаходимо: $\angle DPA = 180^\circ - \angle ADP - \angle DAP = 90^\circ - \alpha - \beta = \gamma$. Таким чином, $\angle EPI = \angle ECI = \gamma$, а це і означає, що точки I, E, C, P лежать на одному колі.

3. Нехай $ABCD$ — вписаний чотирикутник, діагоналі якого взаємно перпендикулярні і перетинаються в точці P. Доведіть, що відрізок, який сполучає середини протилежних сторін чотирикутника $ABCD$ ділить відрізок OP навпіл (O — центр кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$).

(*Олександр Дзюняк*)

Розв'язання.

Нехай M — середина AB, N — середина CD. Доведемо, що чотирикутник $PMON$ є паралелогамом, тоді за властивістю паралелограма діагоналі MN і PO точкою перетину діляться навпіл.



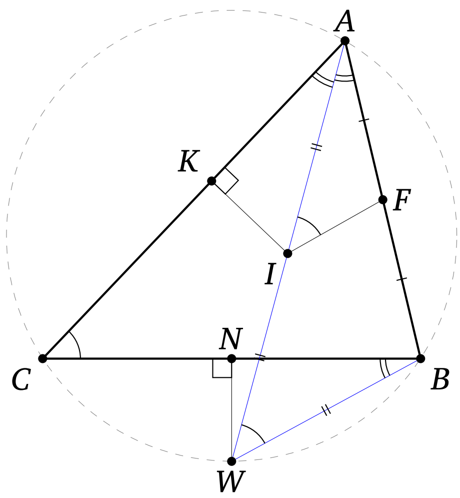
Позначимо $\angle ABD = \alpha$, тоді $\angle ACD = \alpha$, $\angle BAC = \angle BDC = 90^\circ - \alpha$. Далі: з рівнобедрених трикутників AMP, PMB, PNC знаходимо: $\angle AMP \angle PND = 2\alpha$, $\angle MPB = \angle NPC = \alpha$. Тоді $\angle PMO = 90^\circ - \angle AMP = 90^\circ - 2\alpha$, а $\angle NPM = 90^\circ + 2\alpha$. Оскільки $\angle NPM + \angle PMO = 180^\circ$, то прямі NP і OM паралельні.

Крім того, $\angle PNO = 90^\circ - \angle DNP = 90^\circ - 2\alpha$, а тому паралельними є і відрізки PM і NO. Таким чином, чотрикутник $NPMO$ є паралелограмом, що і треба було показати.

4. В трикутнику ABC сторона BC дорівнює a. Точка F — середина AB, I — точка перетину бісектрис трикутника ABC. Виявилось, що $\angle AIF = \angle ACB$. Знайдіть периметр трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання.



1) Опишемо коло ω навколо трикутника ABC і продовжимо AI до перетину з ω в точці W.

2) З'єднаємо точки W і B. Тоді $\angle AWB = \angle C$ (вписані, що спираються на одну дугу); $\angle AIF = \angle C$ (за умовою). Отже, $IF \parallel WB$ і, оскільки $AF = FB$, то й $AI = IW$ (теорема Фалеса).

3) Проведемо $IK \perp AC$. Тоді $IK = r$ і $AK = p - a$ (відомий факт геометрії трикутника).

4) Проведемо $WN \perp BC$. Очевидно, що $BN = CN = \frac{a}{2}$ (трикутник BWC рівнобедрений, оскільки $\smile BW = \smile CW$). $\angle CBW = \angle CAW$ — вписані, що спираються на одну дугу.

5) Оскільки $IW = BW$ (так звана *теорема трилисника*) і, до того ж, $IW = AI$, то $\Delta AIK = \Delta BWN$ — за гіпотенузою та гострим кутом.

6) Отже, $BN = AK$, або $\frac{a}{2} = p - a$, $a = 2p - 2a$ і $2p = 3a$.

5. У трикутнику ABC відомо, що $BC = 5$, $AC - AB = 3$. Доведіть, що $r < 2 < r_a$ (тут r — радіус кола, вписаного у трикутник ABC, r_a — радіус зовнівписаного кола, яке дотикається сторони BC).

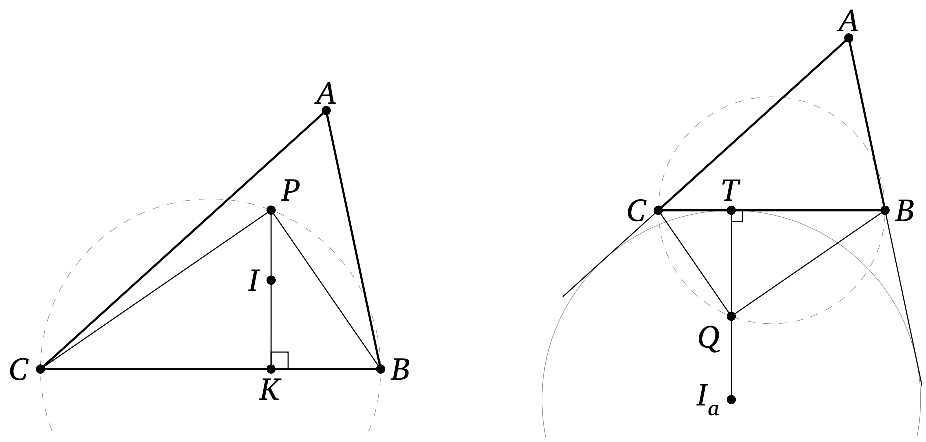
(*Микола Мороз*)

Розв'язання. 1) Доведемо, що $r < 2$.

Відомо, що $BK = p - b = \frac{a+c-b}{2}$. Підставивши дані з умови, знаходимо, що $BK = \frac{5-3}{2} = 1$, $CK = p - c = \frac{a+b-c}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$.

Оскільки $\angle CIB = 90^\circ + \frac{\angle A}{2} > 90^\circ$, то інцентр I знаходиться всередині кола, описаного на BC як на діаметрі.

Нехай P — точка перетину IK з цим колом (див. рис.) Тоді $r = IK < PK$. Але PK є середнім геометричним BK та CK. Тому $PK = \sqrt{1 \cdot 4} = 2$.



2) Нерівність $r_a > 2$ доводиться аналогічно. Справді, $CT = p - b$, $BT = p - c$, $\angle CI_aB = 90^\circ - \frac{\angle A}{2} < 90^\circ$, тому I_a знаходиться поза колом, описаному на BC як на діаметрі. Тому $r_a = I_aT > \sqrt{CT \cdot TB} = \sqrt{(p-b)\cdot(p-c)} = 2$.

6. У гострокутному трикутнику ABC провели бісектрису $\angle A$ до перетину із описаним навколо трикутника ABC колом у точці W. Через точку W проведено пряму паралельно до сторони AB, яка перетинає це ж коло у точці $F \neq W$. Опишіть побудову трикутника ABC, якщо дано відрізки FA і FW, а також $\angle FAC$.

(*Андрій Мостовий*)

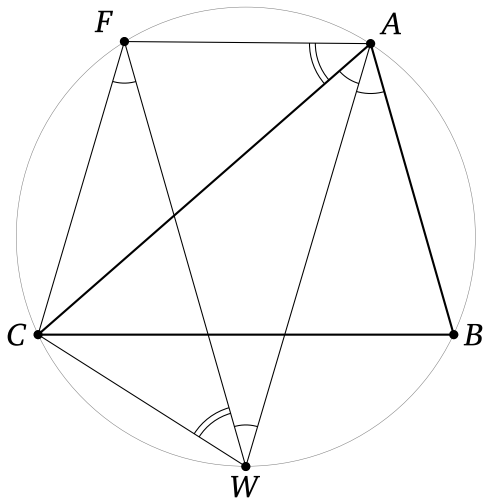
Розв'язання. Аналіз. Проведемо відрізки FA, FC і CW і відмітимо рівні кути. $\angle CAW = \angle WAB = \angle AWF = \angle CFW$ (тут використано паралельність прямих WF та AB, а також властивість вписаних кутів, що спираються на одну дугу). Отже, $CF \parallel AW$. Оскільки паралельні прямі на колі відтинають рівні дуги, а хорди, що стягують рівні дуги рівні, то $CW = FA$. Крім того, $\angle FAC = \angle FWC$ як вписані, що спираються на одну дугу. Тоді у трикутнику CWF відомо дві сторони і кут між ними, і, отже, його можна побудувати.

Побудова. 1) Будуємо трикутник CWF ($CW = FA$, $\angle CWF = \angle FAC$).

2) Описуємо коло навколо трикутника CWF.

3) Точку A можна одержати, провівши через W пряму, яка паралельна до CF до перетину із колом.

4) Точку B можна одержати, провівши через точку A пряму, паралельно до FW до перетину із колом.



10–11 класи

1. Коло $x^2+y^2=25$ перетинає вісь абсцис в точках A та B. Нехай точка P лежить у першій координатній чверті і належить прямій $x=11$, C — точка перетину цієї прямої з віссю Ox, а точка Q є точкою перетину відрізка AP із даним колом. Виявилось, що площа трикутника AQB в чотири рази менша площі трикутника APC. Знайдіть координати точки Q.

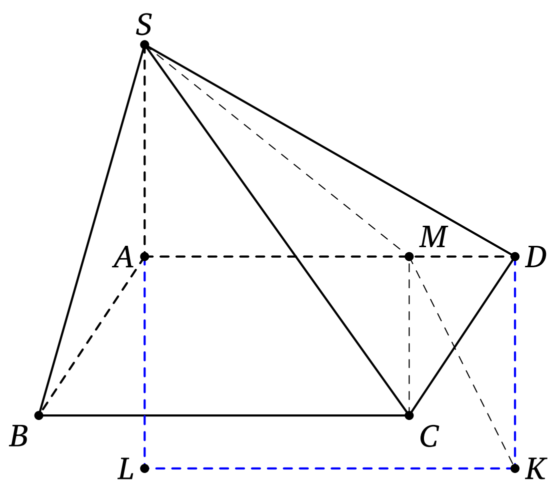
Розв'язання. Оскільки $AB=10$, $BC=6$, то площі трикутникі ABP і BPC відносяться як $10:6=5:3$. Позначимо площу трикутника ABP як $5S$, тоді площа трикутника $BPC=3S$, площа трикутника $ACP=8S$. Далі: $S(AQB)=\frac{1}{4}S(ACP)=2S$, $S(PQB)=5S-2S=3S$. Таким чином, площі трикутників AQB та PQB відносяться як $2:3$, а тому і точка Q ділить відрізок AP у відношенні $2:3$.

Нехай $T(x;0)$ — проекція точки Q на вісь абсцис. Тоді $AT:TC=2:3$, тобто $\frac{5+x}{11-x}=\frac{2}{3}$, звідки $x=\frac{7}{5}$. Тоді, враховуючи, що точка $Q(x;y)$ належить колу $x^2+y^2=25$, $y>0$, знаходимо: $y=\sqrt{25-x^2}=\frac{24}{5}$.

Відповідь. $\left(\frac{7}{5};\frac{24}{5}\right)$.

2. В основі чотирикутної піраміди $SABCD$ лежить прямокутник $ABCD$ зі сторонами $AB=1$ і $AD=10$. Ребро SA піраміди перпендикулярне до основи, $SA=4$. На ребрі AD знайдіть таку точку M, щоб периметр трикутника SMC був мінімальним.

Розв'язання. Периметр трикутника SMC дорівнює $SM+MC+SC$. Оскільки SC не залежить від положення точки M, то периметр трикутника SMC буде мінімальним тоді, коли сума $SM+MC$ є мінімальною.

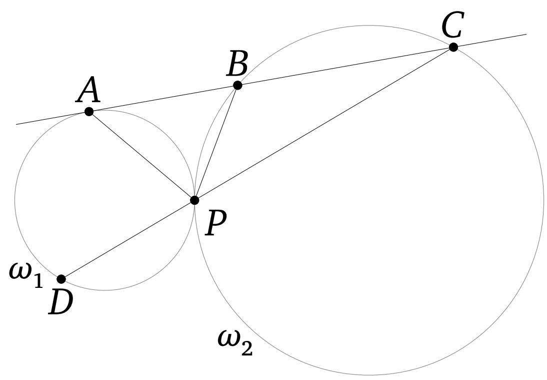


В площині SAD на стороні AD побудуємо прямокутник $ADKL$, який дорівнює прямокутнику $ABCD$. Нехай M належить AD. Тоді трикутники MDC і MDK рівні за двома катетами. Отже, $SM + MC = SM + MK$. Але оскільки точки S і K фіксовані, то $SM + MK$ буде мінімальним, тоді, коли точки S, M, K лежать на одній прямій.

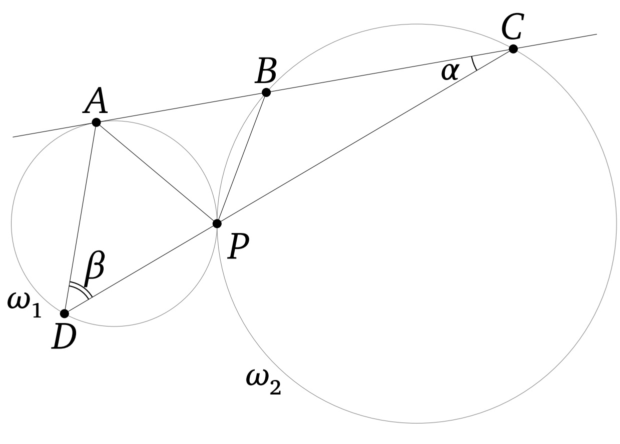
Нехай $AM = x$, тоді $MD = 10 - x$. Трикутники SAM та KDM подібні (за двома кутами), тому $\frac{SA}{DK} = \frac{x}{10-x}$, звідки $x = 8$.

Відповідь. $AM = 8$, $MD = 2$.

3. Два кола ω_1 і ω_2 дотикаються зовнішнім чином у точці P. Через точку A кола ω_1 проведено дотичну до цього кола, яка перетинає коло ω_2 у точках B та C (див. рисунок). Пряма CP повторно перетинає коло ω_1 в точці D. Доведіть, що промінь PA є бісектрисою кута DPB.



Розв'язання. Проведемо відрізок DA і позначимо $\angle ACP = \alpha$, $\angle PDA = \beta$. Тоді зовнішній кут при вершині A трикутника DAC дорівнює $\alpha + \beta$. Тоді і $\angle APD = \alpha + \beta$ (за теоремою про кут між дотичною і хордою).

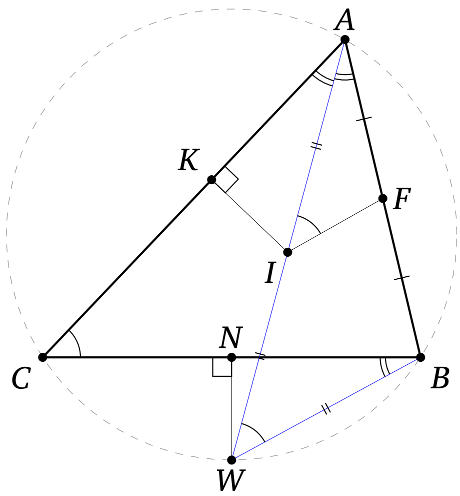


Але $\angle APB = \alpha + \beta$ також. Справді, якщо провести через точку P спільну дотичну до заданих кіл, то за теоремою про кут між дотичною і хордою вона поділить $\angle APB$ на кути β і α.

4. В трикутнику ABC сторона BC дорівнює a. Точка F — середина AB, I — точка перетину бісектрис трикутника ABC. Виявилось, що $\angle AIF = \angle ACB$. Знайдіть периметр трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання.



1) Опишемо коло ω навколо трикутника ABC і продовжимо AI до перетину з ω в точці W.

2) З'єднаємо точки W і B. Тоді $\angle AWB = \angle C$ (вписані, що спираються на одну дугу); $\angle AIF = \angle C$ (за умовою). Отже, $IF \parallel WB$ і, оскільки $AF = FB$, то й $AI = IW$ (теорема Фалеса).

3) Проведемо $IK \perp AC$. Тоді $IK = r$ і $AK = p - a$ (відомий факт геометрії трикутника).

4) Проведемо $WN \perp BC$. Очевидно, що $BN = CN = \frac{a}{2}$ (трикутник BWC рівнобедрений, оскільки $\smile BW = \smile CW$). $\angle CBW = \angle CAW$ — вписані, що спираються на одну дугу.

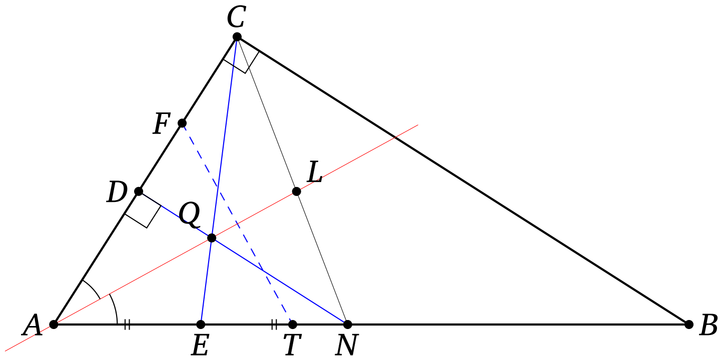
5) Оскільки $IW = BW$ (так звана *теорема трилисника*) і, до того ж, $IW = AI$, то $\Delta AIK = \Delta BWN$ — за гіпотенузою та гострим кутом.

6) Отже, $BN = AK$, або $\frac{a}{2} = p - a$, $a = 2p - 2a$ і $2p = 3a$.

5. В прямокутному трикутнику ABC з гіпотенузою AB кут A більший за кут B. Точка N на гіпотенузі AB така, що $BN = AC$. Відновіть цей трикутник ABC за точкою N, точкою F на катеті AC та прямою l, що містить бісектрису кута A трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання.



1) Проведемо $FK \perp l$ та продовжимо на стільки ж. Отримаємо точку T, яка, очевидно, належить гіпотенузі AB.

2) Пряма NT перетне l в вершині A.

3) Проводимо промінь AF, який містить вершину C трикутника ABC.

4) Аналіз показує, що у трикутнику ACN висота ND, бісектриса AL і медіана CE перетинаються в одній точці. Покажемо, що $\frac{CL}{LN} \cdot \frac{NE}{EA} \cdot \frac{AD}{DC} = 1$. В такому разу за оберненою теоремою Чеви AD, AL і CE перетинаються в одній точці. Очевидно, що $\frac{NE}{EA} = 1$ (E — середина AN). $\frac{CL}{LN} = \frac{AC}{AN}$ за властивістю бісектриси, $\frac{AD}{DC} = \frac{AN}{NB}$ (узагальнена теорема Фалеса). Оскільки $AC = NB$ за умовою, то добуток трьох відношень справді дорівнює 1 і ND, AL, CE перетинаються в одній точці (скажімо, точці Q).

5) Тоді проводимо $ND \perp AF$ і Q є точкою перетину ND і l.

6) Знаходимо E — середину AN. Промені EQ та AF перетнуться в вершині C.

7) На промені AN за точку N відкладаємо відрізок AC і одержуємо вершину B.

6. Дано трикутник ABC, точка I_a — центр зовнівписаного кола, що дотикається до сторони BC, точка M — середина сторони BC, точка W — точка перетину бісектриси кута A трикутника ABC з описаним навколо нього колом. Доведіть, що площа трикутника I_aBC обчислюється за формулою $S(I_aBC) = MW \cdot p$, де p — півпериметр трикутника ABC.

(*Микола Мороз*)

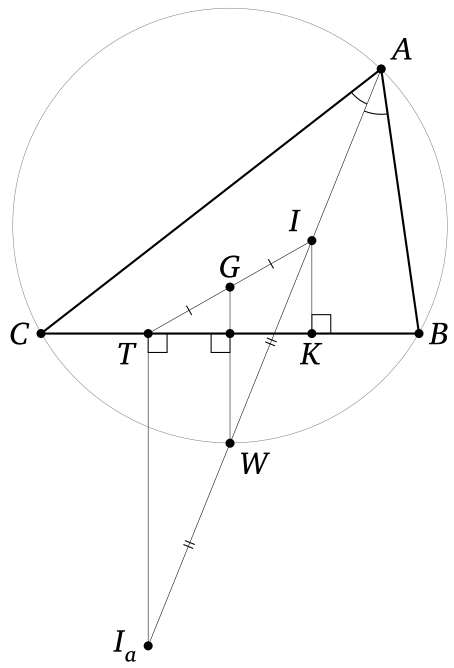
Розв'язання. Нехай площа трикутника ABC рівна S, $BC = a$, r — радіус вписаного кола в цей трикутник. Зрозуміло, що $S(I_aBC) = \frac{1}{2}a \cdot r_a$, де r_a — радіус зовнівписаного кола, яке дотикається до сторони BC, оскільки він є висотою в трикутнику I_aBC. Тому формула, яку необхідно довести, рівносильна рівності $MW \cdot p = \frac{1}{2}a \cdot r_a$, яка в свою чергу рівносильна формулі

$MW = \frac{a \cdot r_a}{2p}$. Але

$$\frac{a \cdot r_a}{2p} = \frac{a \cdot S}{2p(p-a)} = \frac{a \cdot r}{2(p-a)} = \frac{pr - (p-a)r}{2(p-a)} = \\ = \frac{S - (p-a)r}{2(p-a)} = \frac{(p-a)r_a - (p-a)r}{2(p-a)} = \frac{r_a - r}{2}.$$

Тому, щоб довести початкову формулу, досить довести рівність $MW = \frac{r_a - r}{2}$.

Відомо, що точки I, W та I_a лежать на одній прямій, причому точка W ділить відрізок I_aI навпіл (цей факт ще відомий як *теорема Мансіона*).



Також легко показати, що пряма MW перпендикулярна до BC. Справді, оскільки хорди BW та CW описаного кола рівні, бо стягують рівні дуги, то відрізок WM є медіаною у рівнобедреному трикутнику BWC, а тому і висотою.

Нехай точки K і T — точки дотику до сторони BC вписаного і зовнівписаного кіл відповідно, G — точка перетину прямих MW та IT. Зрозуміло, що $I_aT \parallel MW \parallel IK$.

Тоді, оскільки $I_aT \parallel MW$ і при цьому W — середина I_aI, то G — середина IT, а WG — середня лінія у трикутнику I_aIT. Звідси маємо, що $GW = \frac{r_a}{2}$.

Оскільки, як щойно було доведено, G — середина IT, і при цьому $GM \parallel IK$, то GM — середня лінія трикутника ITK. Тому $GM = \frac{r}{2}$.

Звідси остаточно отримуємо рівність $MW = GW - GM = \frac{r_a - r}{2}$. А тому справедлива і формула $S(I_aBC) = MW \cdot p$.