8–9 класи

1. Дано прямокутний трикутник ABC, точка M — середина гіпотенузи AB. Навколо трикутника BCM описано коло, яке перетинає відрізок AC в точці Q, що відмінна від C. Виявилося, що відрізок QA вдвічі більший за катет BC. Знайдіть гострі кути трикутника ABC.

2. На діагоналі BD квадрата $ABCD$ побудовано рівносторонній трикутник BDE, причому точка C розташована всередині трикутника BDE. Нехай M — середина BE. Знайдіть кут між прямими MC і DE.

3. Точка M — середина бічної сторони CD трапеції $ABCD$, точка K — основа перпендикуляру, проведеного із точки M на сторону AB. При цьому $3BK \leq AK$. Доведіть, що $BC + AD \geq 2BM$.

4. Нехай BB_1 і CC_1 — висоти гострокутного трикутника ABC. Із точки B_1 опущено перпендикуляри B_1E та B_1F відповідно на сторони AB і BC трикутника, а із точки C_1 — перпендикуляри C_1K і C_1L на сторони AC і BC відповідно. Виявилось, що прямі EF і KL перпендикулярні. Знайдіть величину кута A трикутника ABC.

5. Нехай AL — бісектриса трикутника ABC. Коло ω_1 є описаним навколо трикутника ABL. Дотична до ω_1 в точці B перетинає продовження AL в точці K. Коло ω_2, описане навколо трикутника CKL, вдруге перетинає ω_1 в точці Q, причому Q лежить на стороні AC. Знайдіть величину кута ABC.

6. В трикутнику ABC проведено висоти BD і CT, вони перетинаються в точці H. Точка Q є основою перпендикуляра, опущеного з точки H на бісектрису кута A. Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута A трикутника ABC, бісектриса кута BHC і пряма QM, де M — середина відрізка DT, перетинаються в одній точці.

29 лютого 2020 р.

10–11 класи

1. Дано гострокутний трикутник ABC. Вписане в трикутник ABC коло із центром в точці I дотикається сторін AB, BC в точках C_1 та A_1 відповідно. Прямі A_1C_1 та AC перетинаються в точці Q. Доведіть, що кола, описані навколо трикутників AIC і A_1CQ, дотикаються.

2. На середній лінії MN трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) обрано точки F і G так, що $\angle ABF = \angle CBG$. Доведіть, що тоді $\angle BAF = \angle DAG$.

3. Відрізки BF і CN — висоти в гострокутному трикутнику ABC. Пряма OI, яка з'єднує центри описаного та вписаного кіл трикутника ABC паралельна до прямої FN. Знайдіть довжину висоти AK в трикутнику ABC, якщо радіуси його описаного та вписаного кіл дорівнюють R та r відповідно.

4. Висоти гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. На відрізках BH та CH позначили точки B_1 та C_1 відповідно так, що $B_1C_1 \parallel BC$. Виявилося, що центр кола ω, описаного навколо трикутника B_1HC_1, лежить на прямій BC. Доведіть, що коло Γ, яке описане навколо трикутника ABC, дотикається кола ω.

5. Про трикутник ABC відомо, що $3 \cdot BC = CA + AB$. Нехай A-симедіана трикутника ABC перетинає описане коло трикутника ABC в точці D. Доведіть, що

$$\frac{1}{BD} + \frac{1}{CD} = \frac{6}{AD}.$$

Примітка. Якщо AM — медіана трикутника, то промінь, який симетричний променю AM відносно бісектриси кута A трикутника, називається A-симедіаною трикутника ABC.

6. В нерівнобедреному трикутнику ABC I — центр вписаного кола, M_1 — середина сторони BC, K_2, K_3 — точки дотику вписаного кола трикутника з відрізками AC і AB відповідно. Точка P лежить на описаному колі трикутника BCI, а кут M_1PI — прямий. Доведіть, що прямі BC, PI, K_2K_3 перетинаються в одній точці.

29 лютого 2020 р.