8–9 класи

1. K — довільна точка всередині гострокутного трикутника ABC, в якому $\angle A = 30^\circ$. F та N — точки перетину медіан в трикутниках AKC і AKB відповідно. Відомо, що $FN = q$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.

2. Дано чотирикутник $ABCD$, навколо якого можна описати коло. До сторін AD і CD провели серединні перпендикуляри, які перетинаються у точці Q та перетинають сторони BC і AB у точках P і K відповідно. Виявилось, що точки K, B, P, Q лежать на одному колі. Доведіть, що точки A, Q, C лежать на одній прямій.

3. Доведіть, що в трикутнику ABC основа висоти AH, точка дотику вписаного кола зі стороною BC і проекції точки A на бісектриси $\angle B$ та $\angle C$ трикутника лежать на одному колі.

4. Дано гострокутний трикутник ABC, в якому $\angle BAC = 60^\circ$. На сторонах AC та AB взято точки T та Q відповідно — такі, що $CT = TQ = QB$. Доведіть, що центр зовнівписаного кола трикутника ATQ належить стороні BC.

5. Навколо рівнобедреного трикутника ABC з основою BC описано коло. Бісектриса кута C і бісектриса кута A перетинають коло у точках E і D відповідно, а відрізок DE перетинає сторони BC і AB у точках P і Q відповідно. Відновіть $\triangle ABC$ за точками D, P, Q, якщо відомо, в якій півплощині відносно прямої DQ лежить вершина A.

6. В колі ω провели хорду BC, яка не є діаметром. Точка A рухається по колу ω. H — ортоцентр трикутника ABC. Доведіть, що при будь-якому розташуванні точки A коло, побудоване на AH як на діаметрі, дотикається двох фіксованих кіл ω_1 та ω_2.

26 березня 2021 року

10–11 класи

1. Нехай BF та CN — висоти гострокутного трикутника ABC. Бісектриси кутів ACN та ABF перетинаються в точці T. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника FTN, якщо відомо, що $BC = a$.

2. У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 45^\circ$. Діагоналі AC і BD перетинаються в точці F, причому $BC = CF$, а діагональ AC є бісектрисою кута A. Визначіть два інші кути чотирикутника $ABCD$.

3. В трикутнику ABC h_a; h_b; h_c — висоти, а p — його півпериметр. Порівняйте p^2 та $h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a$.

4. В трикутнику ABC, точка H є ортоцентром. Коло з центром у точці H та з радіусом AH перетинає прямі AB та AC у точках E та D відповідно. Точку A відобразили відносно прямої BC, отримали точку X. Доведіть, що XH є бісектрисою кута DXE.

5. В трикутнику ABC точка I — центр вписаного кола. AT — відрізок дотичної до описаного навколо трикутника BIC кола. На промені AB за точку B і на промені AC за точку C відклали відрізки BD і CE відповідно такі, що $BD = CE = AT$. Нехай точка F така, що $ABFC$ — паралелограм. Доведіть, що точки D, E та F лежать на одній прямій.

6. У гострокутному трикутнику ABC точка I — центр вписаного кола, точка T — середина дуги ABC описаного кола трикутника ABC. Виявилося, що $\angle AIT = 90^\circ$. Доведіть, що $AB + AC = 3BC$.

26 березня 2021 року