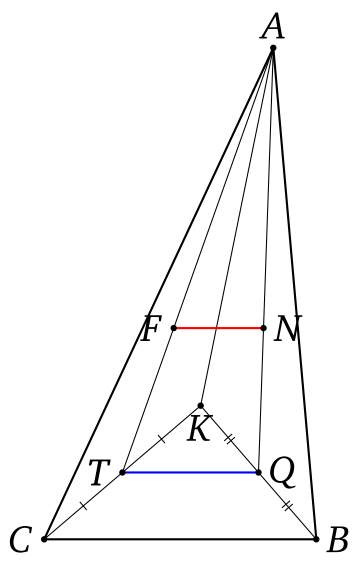
8–9 класи

1. K — довільна точка всередині гострокутного трикутника ABC, в якому $\angle A = 30^\circ$. F та N — точки перетину медіан в трикутниках AKC і AKB відповідно. Відомо, що $FN = q$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання.



Нехай $BC = a$ і точка O — центр описаного навколо $\triangle ABC$ кола. Тоді $\angle BOC = 60^\circ$ — центральний, отже $\triangle BOC$ — рівносторонній і $a = R$.

Нехай також промені AF і AN перетинають CK і BK відповідно у точках T і Q. Оскільки

$$\frac{AF}{FT} = \frac{AN}{NQ} = \frac{2}{1},$$

то $FN = \frac{2}{3}TQ$ і $TQ = \frac{3}{2}q$.

Але TQ — середня лінія трикутника BKC, отже, $TQ = \frac{1}{2}a$. Звідси $a = 2TQ = 3q$. Але $a = R$. Отже, $R = 3q$.

Відповідь. $3q$.

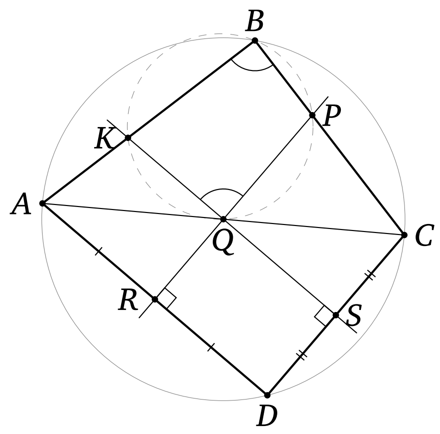
2. Дано чотирикутник $ABCD$, навколо якого можна описати коло. До сторін AD і CD провели серединні перпендикуляри, які перетинаються у точці Q та перетинають сторони BC і AB у точках P і K відповідно. Виявилось, що точки K, B, P, Q лежать на одному колі. Доведіть, що точки A, Q, C лежать на одній прямій.

(*Олена Артемчук*)

Розв'язання.

Точка Q є точкою перетину серединних перпендикулярів до двох сторін вписаного чотирикутника, а тому є центром кола, що описане навколо нього.

Нехай точки R і S — середини сторін AD і CD відповідно, а $\angle ABC = \alpha$.



Оскільки чотирикутник $ABCD$ вписаний, то

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ,$$

а тому $\angle ADC = 180^\circ - \alpha$. Так як $QR \perp AD$ і $QS \perp CD$, то $\angle RQS + \angle ADC = 180^\circ$, звідки $\angle RQS = \alpha$. Тоді $\angle RQS = \angle KQP = \angle KBP = \alpha$.

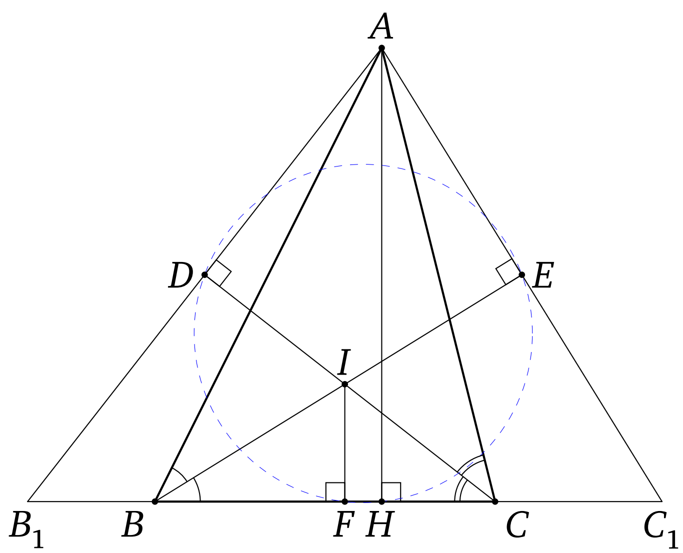
За умовою, чотирикутник $KBPQ$ вписаний, а тому $\angle KQP + \angle KBP = 180^\circ$, а оскільки ці кути рівні, то $\angle KQP = \angle KBP = 90^\circ$.

Оскільки $\angle ABC = 90^\circ$ — вписаний, то AC — діаметр, а тому A, Q, C дійсно лежать на одній прямій (діаметрі), що й треба було довести.

3. Доведіть, що в трикутнику ABC основа висоти AH, точка дотику вписаного кола зі стороною BC і проекції точки A на бісектриси $\angle B$ та $\angle C$ трикутника лежать на одному колі.

(*Дмитро Прокопенко*)

Розв'язання.



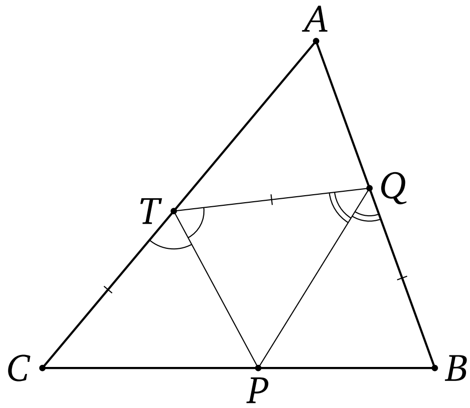
Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC, D, E — проекції точки A на бісектриси кутів C та B відповідно, F — проекція точки I на BC. Промені AD і AE перетинають пряму BC в точках B_1 і C_1 відповідно. CD є бісектрисою і висотою в трикутнику AB_1C. Отже, D — середина AB_1. Аналогічно, E — середина AC_1.

Тоді в трикутнику AB_1C_1 I — точка перетину серединних перпендикулярів. Таким чином, I — центр описаного кола трикутника AB_1C_1, тоді F — середина B_1C_1. Тоді точки D, E, F, H лежать на колі Ейлера трикутника AB_1C_1, що і потрібно було довести.

4. Дано гострокутний трикутник ABC, в якому $\angle BAC = 60^\circ$. На сторонах AC та AB взято точки T та Q відповідно — такі, що $CT = TQ = QB$. Доведіть, що центр зовнівписаного кола трикутника ATQ належить стороні BC.

(*Дмитро Швецов*)

Розв'язання.



Розглянемо $\triangle ATQ$. Нехай бісектриси зовнішніх кутів $\angle ATQ$ і $\angle AQT$ перетинаються в точці P, а кути $\angle ATQ$ і $\angle AQT$ дорівнюють α та β відповідно. Потрібно довести, що точки C, P, B лежать на одній прямій.

Очевидно, $\alpha + \beta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Оскільки $\angle CTP = \angle PTQ = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ і $\angle TQP = \angle PQB = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, то

$$\angle TPQ = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\alpha + \beta}{2} = 60^\circ.$$

З'єднаємо точку P з вершинами B і C. $\triangle TPC = \triangle TPQ$ (за двома сторонами і кутом між ними). Отже, $\angle TPC = \angle TPQ = 60^\circ$.

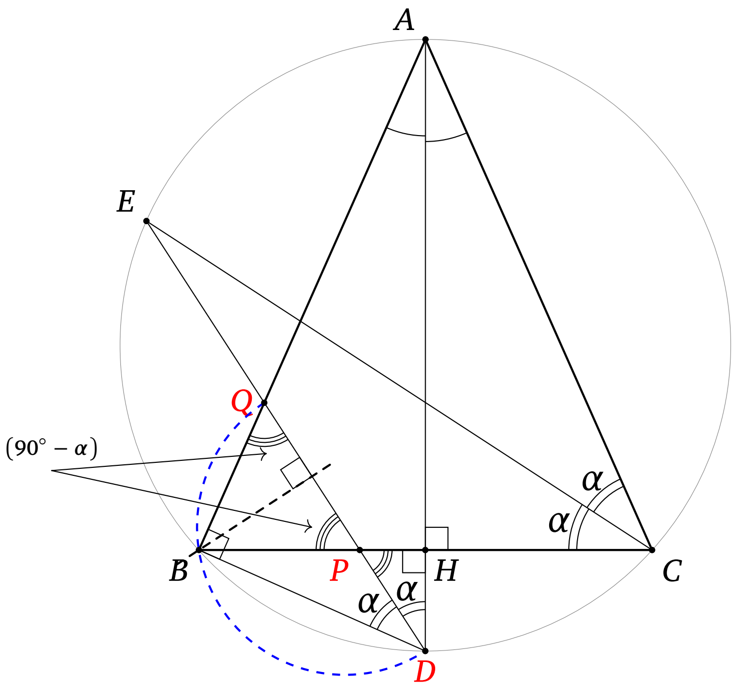
Аналогічно $\angle QPB = \angle QPT = 60^\circ$.

Таким чином, $\angle CPB = 60^\circ \cdot 3 = 180^\circ$ і точка P належить стороні BC, що і треба було довести.

5. Навколо рівнобедреного трикутника ABC з основою BC описано коло. Бісектриса кута C і бісектриса кута A перетинають коло у точках E і D відповідно, а відрізок DE перетинає сторони BC і AB у точках P і Q відповідно. Відновіть $\triangle ABC$ за точками D, P, Q, якщо відомо, в якій півплощині відносно прямої DQ лежить вершина A.

(*Марія Рожкова*)

Розв'язання.



Здійснимо аналіз. Проведемо BD. $\angle ABD = 90^\circ$ (вписаний кут, що спирається на діаметр AD).

$\angle BHD = \angle AHC = 90^\circ$ (AH — бісектриса рівнобедреного $\triangle BAC$, проведено до основи BC, а отже і висота).

$\angle ACE = \angle ADE$, $\angle BCE = \angle BDE$ (як вписані кути, що спираються на одну дугу), але $\angle ACE = \angle BCE$ за умовою. Отже:

$$\angle ACE = \angle BCE = \angle ADE = \angle BDE = \alpha.$$

Тоді з $\triangle DBQ$ ($\angle B = 90^\circ$): $\angle BQD = 90^\circ - \alpha$.

З $\triangle DHP$ ($\angle H = 90^\circ$): $\angle DPH = 90^\circ - \alpha$ і $\angle BPQ = 90^\circ - \alpha$ (вертикальні кути). Тобто $\angle BQD = \angle BPQ$ і $\triangle BPQ$ рівнобедрений (за ознакою).

Тоді приходимо до побудови:

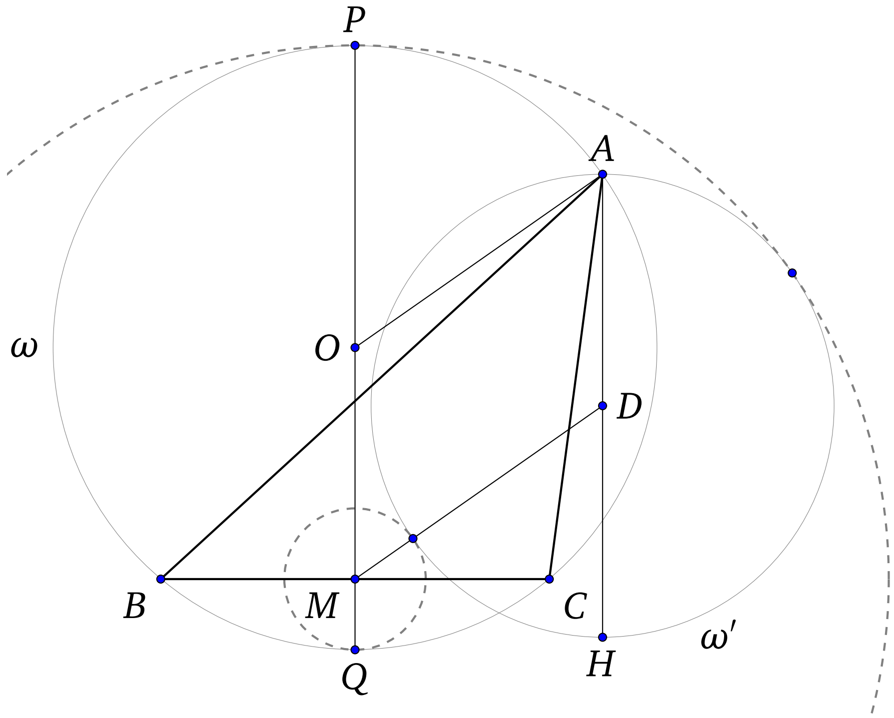
- точку B отримуємо як одну з точок перетину серединного перпендикуляра відрізка PQ і кола, побудованого на DQ як на діаметрі;
- точка A визначається перетином прямої BQ та прямої, що проходить через точку D перпендикулярно BP;

- точка C — симетрична точці B відносно прямої AD.

6. В колі ω провели хорду BC, яка не є діаметром. Точка A рухається по колу ω. H — ортоцентр трикутника ABC. Доведіть, що при будь-якому розташуванні точки A коло, побудоване на AH як на діаметрі, дотикається двох фіксованих кіл ω_1 та ω_2.

(*Дмитро Прокопенко*)

Розв'язання.



Введемо такі позначення: O — центр кола ω, R — радіус ω, M — середина BC, D — середина AH, ω' — коло з діаметром AH, d — радіус ω'.

Для розв'язання задачі ми використаємо такий відомий факт: два неконцентричні кола з радіусами r та R ($r \leq R$) дотикаються тоді і тільки тоді, коли відстань між центрами цих кіл дорівнює $R + r$ або $R - r$.

Нехай PQ — діаметр кола ω, якому належить точка M, причому M належить відрізку OQ. Доведемо, що коло ω' дотикається до кіл з центром в точці M і радіусами MP та MQ (позначимо їх відповідно ω_1 та ω_2). Очевидно, що ці кола фіксовані і не залежать від вибору точки A.

Добре відомо, що $OM = \frac{1}{2}AH = AD = d$. З цього випливає, що чотирикутник $OADM$ — паралелограм. Тоді $MP = R + d$ — радіус ω_1, $MQ = R - d$ — радіус ω_2.

Виходить, що відстань між центрами кіл ω' і ω_1 дорівнює різниці радіусів цих кіл, а відстань між центрами кіл ω' і ω_2 дорівнює сумі радіусів цих кіл. Отже, ω' дотикається і ω_1, і ω_2.

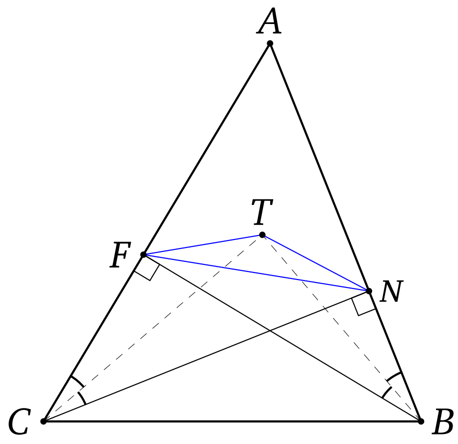
10–11 класи

1. Нехай BF та CN — висоти гострокутного трикутника ABC. Бісектриси кутів ACN та ABF перетинаються в точці T. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника FTN, якщо відомо, що $BC = a$.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання.

Точки B, N, F, C належать одному колу з діаметром BC ($\angle BNC = \angle BFC = 90°$). Покажемо, що й точка T належить цьому колу. $\angle ACN = \angle ABF = 90° - \angle A$. Тоді їх половинки $\angle TCN = \angle ABT = 45° - \frac{\angle A}{2}$. Отже, точки B, N, T, C лежать на одному колі.



Тому усі 5 точок B, N, T, F, C лежать на одному колі з діаметром $BC = a$.

Таким чином, радіус кола, описаного навколо трикутника FTN, дорівнює $\frac{1}{2}a$.

Відповідь. $\frac{1}{2}a$.

2. У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle A = 90°$, $\angle C = 45°$. Діагоналі AC і BD перетинаються в точці F, причому $BC = CF$, а діагональ AC є бісектрисою кута A. Визначіть два інші кути чотирикутника $ABCD$.

(*Марія Рожкова*)

Розв'язання.

З умови випливає, що $\angle CBF = \angle BFC = \angle AFD$. Тоді у $\triangle AFD$ і $\triangle CBD$: $\angle ADF = \angle BDC$, бо $\angle FAD = \angle BCD = 45°$. Отже, DB — бісектриса $\angle D$.

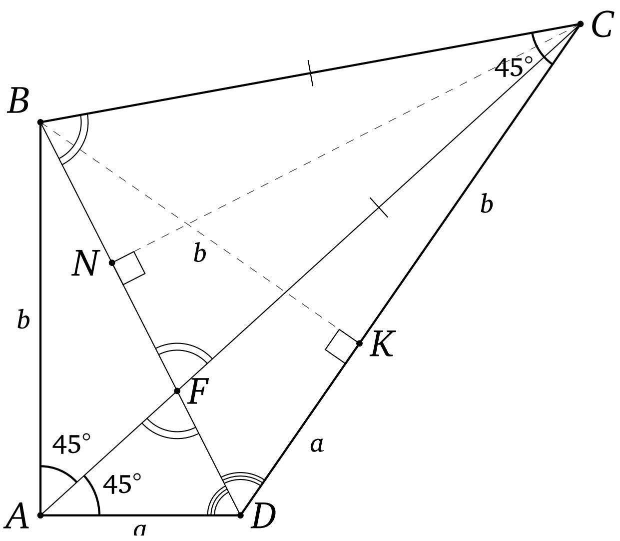
Проведемо $BK \perp DC$. $\triangle ADB = \triangle KDB$ (за гіпотенузою BD і гострим кутом $\angle ADB = \angle KDB$).

Позначимо $AD = a$, $AB = b$. Тоді $DK = a$, $BK = b$.

$\triangle BKC$ — прямокутний рівнобедрений ($\angle C = 45°$). Тому $CK = BK = b$, $CD = a + b$.

Проведемо $CN \perp BD$. $\triangle CND \sim \triangle BAD$. Тому:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{DN}{AD}; \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{DN}{a}; \quad \Leftrightarrow \quad DN = \frac{a\left(a+b\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



З іншого боку $DN = FD + \frac{1}{2}BF$. За властивістю бісектриси з $\triangle ABD$ маємо:

$$FD = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}, \quad BF = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}.$$

Тобто

$$DN = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}.$$

Отже,

$$\frac{a(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a+b};$$

$$\frac{a(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2a\sqrt{a^2+b^2} + b\sqrt{a^2+b^2}}{2(a+b)};$$

$$2a(a+b)^2 = \left(a^2+b^2\right)(2a+b);$$

$$3a^2 = b^2.$$

Звідки $BD = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$ і в $\triangle ABD$ $\angle ABD = 30^\circ$.

Отже,

$$\angle ADC = 2\angle ADB = 120^\circ,$$

$$\angle ABC = 360^\circ - \left(120^\circ + 90^\circ + 45^\circ\right) = 105^\circ.$$

Відповідь. 105°, 120°.

3. В трикутнику ABC h_a; h_b; h_c — висоти, а p — його півпериметр. Порівняйте p^2 та $h_ah_b + h_bh_c + h_ch_a$.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання. Домножимо обидві частини на r, де r — радіус вписаного кола $\triangle ABC$:

$$p^2r \ \vee \ \left(h_ah_b + h_bh_c + h_ch_a\right)r.$$

Оскільки

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{h_bh_c + h_ah_c + h_ah_b}{h_ah_bh_c},$$

то

$$r = \frac{h_a h_b h_c}{h_b h_c + h_a h_c + h_a h_b}.$$

Після скорочення отримуємо:

$$p^2 r \ \vee \ h_a h_b h_c.$$

Якщо S — площа $\triangle ABC$ (враховуючи, що $S = pr$ і $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$), то маємо:

$$pS \ \vee \ \frac{2S}{a} \cdot \frac{2S}{b} \cdot \frac{2S}{c}.$$

Так як $abc = 4SR$ (де R — радіус описаного кола $\triangle ABC$), отримаємо:

$$pS \ \vee \ \frac{8S^3}{4SR} \quad \Leftrightarrow \quad pS \ \vee \ \frac{2S^2}{R} \quad \Leftrightarrow \quad pR \ \vee \ 2S \quad \Leftrightarrow \quad pR \ \vee \ 2pr.$$

Але $R \geq 2r$ — відома нерівність трикутника, наслідок з формули Ейлера $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Отже, $p^2 \geq h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a$.

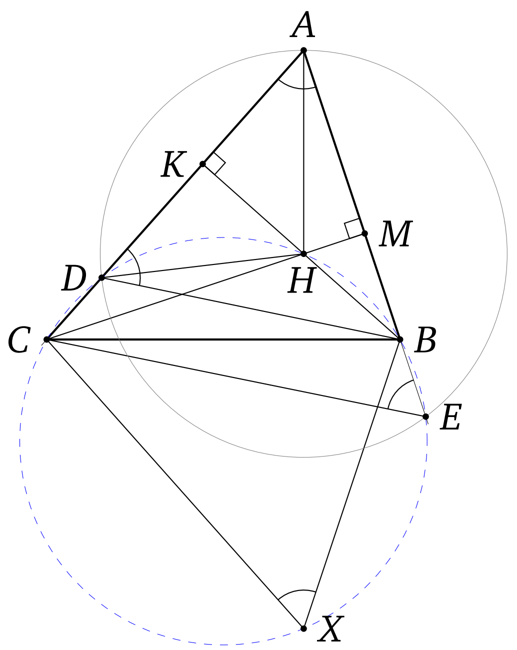
Відповідь. $p^2 \geq h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a$.

4. В трикутнику ABC, точка H є ортоцентром. Коло з центром у точці H та з радіусом AH перетинає прямі AB та AC у точках E та D відповідно. Точку A відобразили відносно прямої BC, отримали точку X. Доведіть, що XH є бісектрисою кута DXE.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання.

Доведемо, що точки X, D, H, E лежать на одному колі. Проведемо висоти CM та BK. Розглянемо трикутник ADH: він є рівнобедреним ($HD = AH$), а HK є висотою. Тоді $AK = KD$. З цього трикутник ADB також є рівнобедреним, оскільки $BK \perp AD$ та $AK = KD$. Тоді $\angle BAC = \angle ADB$. Аналогічно доводиться, що $\angle BAC = \angle AEC$. Тоді $\angle ADB = \angle AEC$, з цього: чотирикутник $CDBE$ є вписаним.



$$\angle CDB = 180^\circ - \angle BAC = \angle CHB,$$

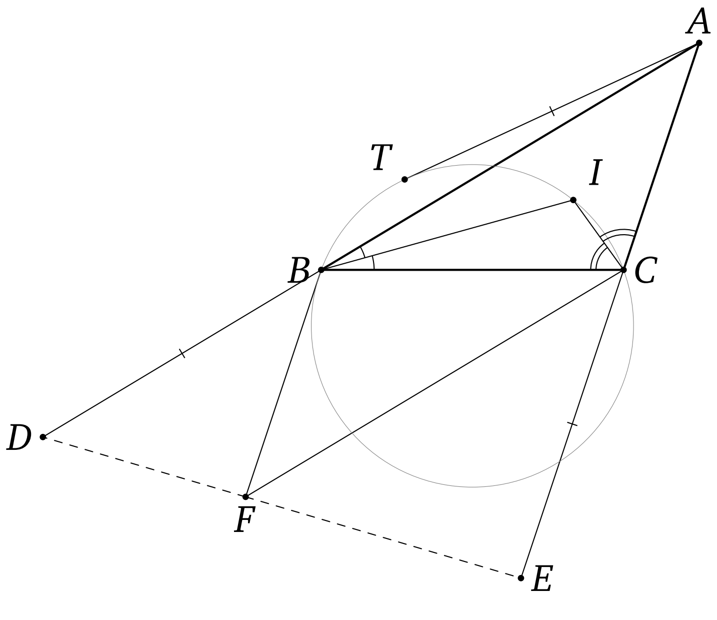
до того ж $\angle CXB = \angle BAC = \angle ADB$, що означає що точки H та X лежать на описаному колі чотирикутника $CDBE$. А отже точки X, D, H, E лежать на одному колі. Тоді, оскільки дуги HD і HE рівні ($HD = HE$), це і означає, що $\angle DXH = \angle EXH$, що і потрібно було довести.

5. В трикутнику ABC точка I — центр вписаного кола. AT — відрізок дотичної до описаного навколо трикутника BIC кола. На промені AB за точку B і на промені AC за точку C відклали відрізки BD і CE відповідно такі, що $BD = CE = AT$. Нехай точка F така, що $ABFC$ — паралелограм. Доведіть, що точки D, E та F лежать на одній прямій.

(*Дмитро Прокопенко*)

Розв'язання.

Нехай $AC = b$, $AB = c$. Використаємо такий факт: $AT = \sqrt{bc}$. Справді, із леми про тризуб випливає, що центр кола ω, описаного навколо трикутника BIC належить бісектрисі кута A трикутника ABC. Позначимо центр кола ω через O. Нехай промінь AB повторно перетинає коло ω в точці X. Тоді трикутники AXO та ACO рівні за двома сторонами і кутом між ними. Тому $AT^2 = AX \cdot AB = AC \cdot AB = bc$.



Доведемо, що трикутники DBF та FCE є подібними. Справді, $\angle DBF = \angle FCE$. Крім того,

$$\frac{BD}{CF} = \frac{\sqrt{bc}}{c} = \sqrt{\frac{b}{c}}, \quad \frac{BF}{CE} = \frac{b}{\sqrt{bc}} = \sqrt{\frac{b}{c}},$$

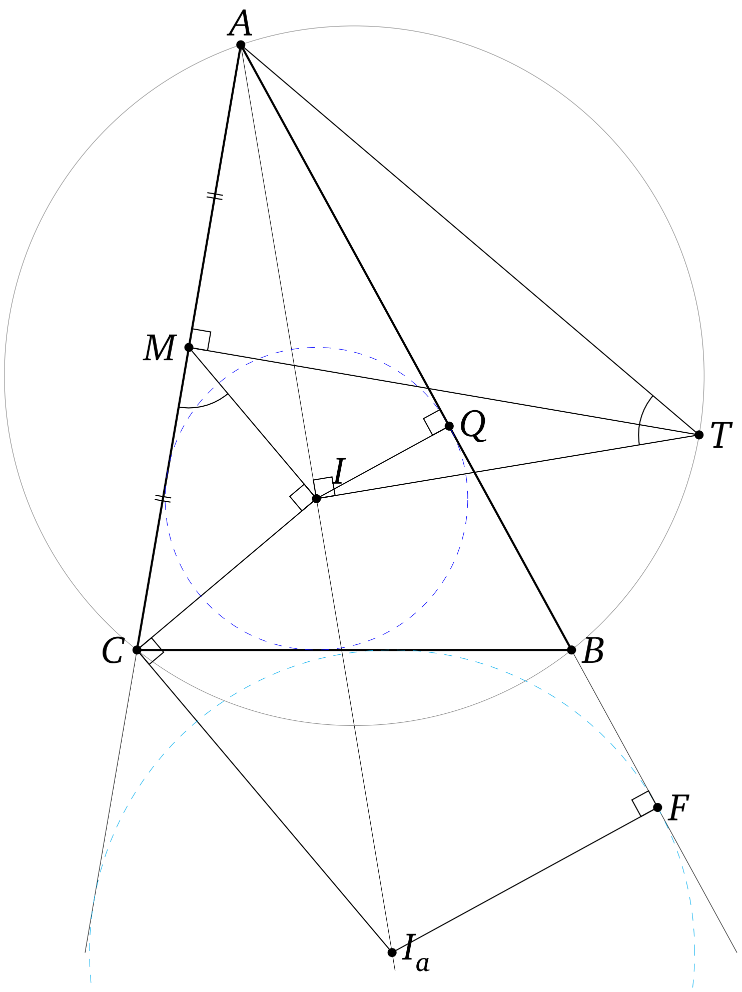
тобто
$$\frac{BF}{CE} = \frac{BD}{CF}.$$
Значить, трикутники DBF та FCE подібні.

Помітимо, що $ABFC$ — паралелограм, тому $\angle BFC = \angle BAC$. Тоді
$$\angle BFD + \angle BFC + \angle CFE = 180^\circ,$$
тобто точки D, F, E лежать на одній прямій.

6. У гострокутному трикутнику ABC точка I — центр вписаного кола, точка T — середина дуги ABC описаного кола трикутника ABC. Виявилося, що $\angle AIT = 90^\circ$. Доведіть, що $AB + AC = 3BC$.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання.



Нехай точка M — середина AC, тоді $MT \perp AC$, при цьому $\angle MTA = \frac{\angle B}{2}$.

Чотирикутник $AMIT$ є вписаним, оскільки $\angle AMT = \angle AIT = 90^\circ$, тоді

$$\angle MAI = \angle MTI = \frac{\angle A}{2} \text{ та } \angle ATI = \angle IMC.$$

Але

$$\angle ATI = \angle MTA + \angle MTI = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle A}{2},$$

тоді $\angle IMC = \dfrac{\angle B}{2} + \dfrac{\angle A}{2}$.

Розглянемо $\triangle MIC$. Оскільки $\angle ICM = \dfrac{\angle C}{2}$, то

$$\angle IMC + \angle ICM = \left(\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}\right) + \frac{\angle C}{2} = \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2},$$

тобто $\angle IMC + \angle ICM = 90^\circ$. Це означає, що $\angle CIM = 90^\circ$.

Нехай точка I_a — центр зовнівписаного кола $\triangle ABC$, яке дотикається до сторони BC. Тоді $\angle I_aCI = 90^\circ$, з цього: $\angle I_aCI = \angle CIM$. А отже $MI \parallel CI_a$. Тоді в трикутнику ACI_a відрізок MI є середньою лінією, а отже $AI = II_a$.

Нехай вписане та зовнівписане (яке дотикається до сторони BC) кола $\triangle ABC$ дотикаються до прямої AB у точках Q та F відповідно. Оскільки $AI = II_a$ та $IQ \parallel I_aF$, то $AQ = QF$, тобто

$$2AQ = AF \tag{1}$$

Якщо p — півпериметр $\triangle ABC$, то $AF = p$, а $AQ = p - BC$. Тоді, враховуючи рівність (1), отримаємо:

$$\begin{aligned} 2\left(p - BC\right) &= p; \\ p &= 2BC. \end{aligned}$$

Отже, периметр:

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} &= 4BC; \\ AB + BC + CA &= 4BC; \\ AB + AC &= 3BC, \end{aligned}$$

що і треба було довести.