8–9 класи

1. Нехай BM — медіана трикутника ABC. На продовженні MB за точку B обрано точку K так, що $BK = \frac{1}{2}AC$. Доведіть, що якщо кут AMB дорівнює 60°, то $AK = BC$.

(*Михайло Штанденко*)

Розв'язання.

I спосіб. Відкладемо на промені MB відрізок $MD = AM = BK$ (рис. 1). Тоді трикутник AMD рівносторонній. Оскільки $KD = MK - MD = MK - BK = MB$, $AD = CM$ та $\angle ADK = \angle CMB = 120^\circ$, то трикутники ADK і CMB рівні. Звідси $AK = BC$.

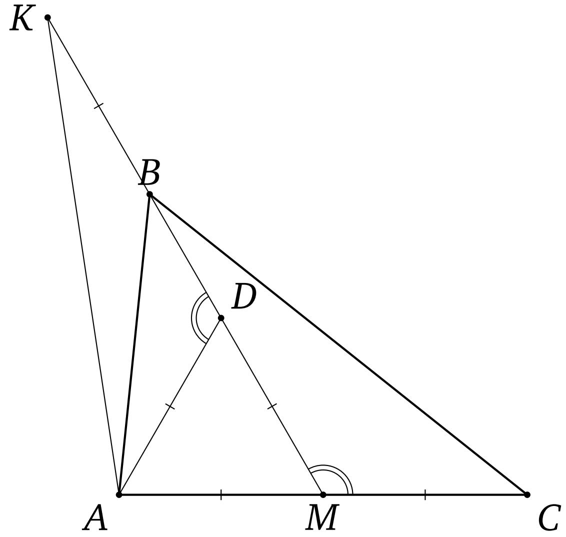


Рис. 1

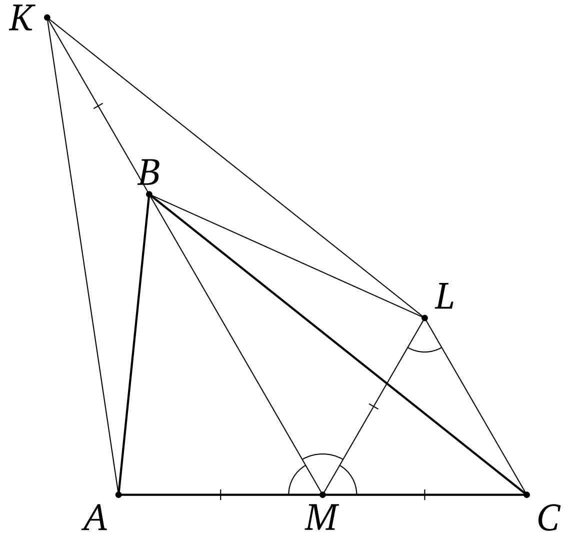


Рис. 2

II спосіб. На бісектрисі кута $\angle BMC$ відмітимо таку точку L, що $AM = ML$ (рис. 2). Маємо

$$\angle BMA = \angle BML = \angle LMC = 60^\circ,$$
$$AM = MC = ML.$$

Тоді трикутник MLC — рівносторонній, з чого слідує, що $CL = \frac{1}{2}AC = BK$, $\angle MLC = 60^\circ$.

Оскільки $\angle KML = \angle MLC$, то прямі KM і LC паралельні. Отже, чотирикутник $BKLC$ — паралелограм ($BK = CL$, $BK \parallel CL$), а тому $KL = BC$.

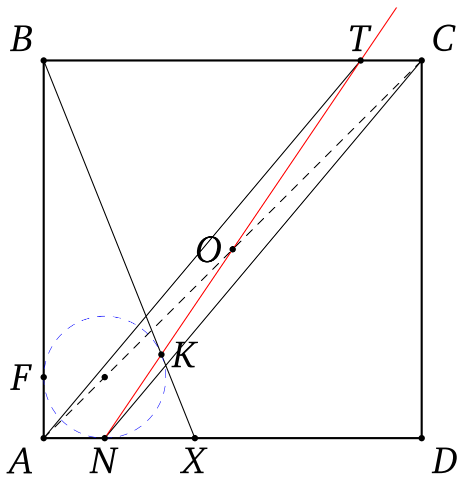
З іншого боку, трикутники AMK і LMK рівні за двома сторонами і кутом між ними, тому $AK = KL$. Таким чином, $AK = BC$.

2. На стороні AD квадрата $ABCD$ обрано точку X. У трикутник ABX вписано коло, яке дотикається до AX, BX і AB в точках N, K і F відповідно.

Доведіть, що промінь NK проходить через центр O квадрата $ABCD$.

(*Дмитро Швецов*)

Розв'язання.

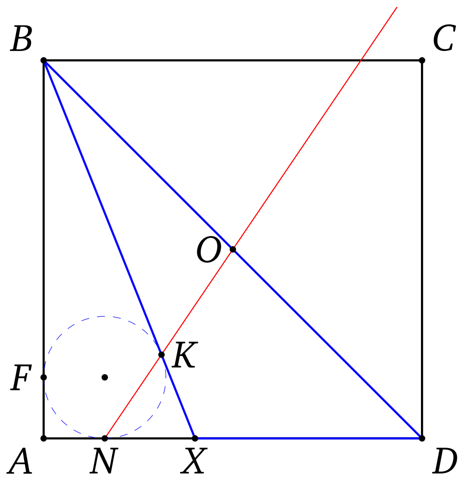


I спосіб. Нехай промінь NK перетинає BC в точці T. Оскільки $\angle XNK = \angle XKN$, то $XN = XK$. Але $\angle XKN = \angle BKT$ (як вертикальні), а $\angle XNK = \angle KTB$ (як внутрішні різносторонні при $BC \parallel AD$ і січній NT). Отже, $\angle BKT = \angle KTB$ і $BT = BK$.

Далі, $BK = BF$, $AF = AN$, тоді $AN = CT$ (від рівних відрізків відняли рівні).

Оскільки також $AN \parallel CT$, то $ATCN$ — паралелограм. Точка O — середина його діагоналі AC, а отже і середина діагоналі NT цього паралелограма.

Таким чином, $O \in NK$, що і треба було довести.



II спосіб. Застосуємо теорему, обернену до теореми Менелая, для трикутника BXD та січної NO. Для цього доведемо, що

$$\frac{BK}{KX} \cdot \frac{XN}{ND} \cdot \frac{DO}{OB} = 1. \qquad (1)$$

Звідси випливатиме, що точки N, K і O лежать на одній прямій.

Маємо $DO = OB$ (бо O — центр квадрата), $XN = KX$ (як відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола). Тому залишається довести, що

$$\frac{BK}{ND} = 1, \quad \text{або} \quad BK = ND. \qquad (1')$$

Справді, якщо $AB = a$, $AF = AN = x$ (відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола), то

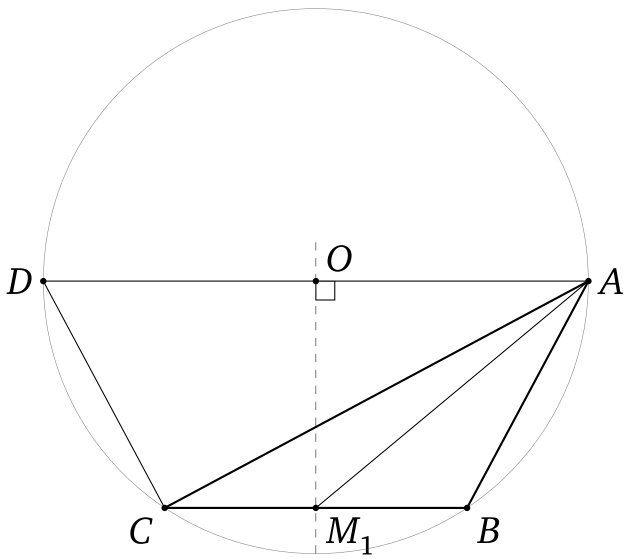
$$BK = BF = a - x,$$
$$ND = a - x.$$

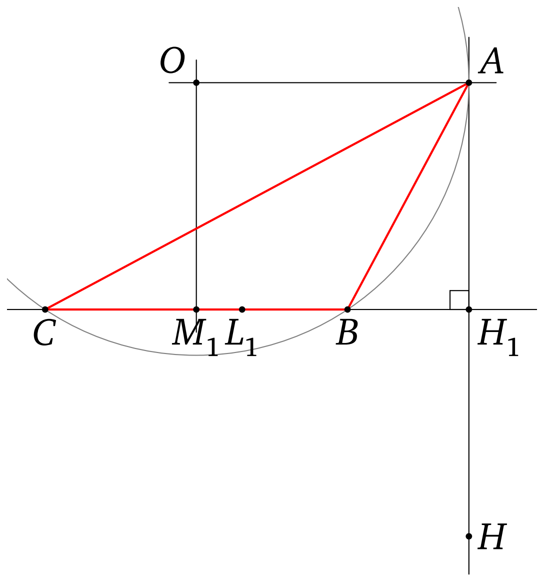
Отже, $BK = ND$. Це означає, що рівність (1) правильна, а тому точки N, K, O лежать на одній прямій, тобто $O \in NK$, що і треба було довести.

3. Відновіть трикутник ABC, в якому $\angle B - \angle C = 90^\circ$, за ортоцентром H та точками M_1 і L_1 — відповідно основами медіани та бісектриси, проведених з вершини A.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання. Покажемо, що коли $\angle B - \angle C = 90^\circ$, то медіану AM_1 видно із центра O описаного кола під кутом 90°. Для цього добудуємо $\triangle ABC$ до рівнобічної трапеції $ABCD$.





Тоді $\angle DCB = \angle B$ та $\angle DCA = \angle B - \angle C = 90^\circ$. Отже, AD — діаметр кола, описаного навколо трикутника ABC та трапеції $ABCD$.

Таким чином, $\angle AOM_1 = 90^\circ$.

Оскільки $AH = 2OM_1$ (відомий факт геометрії трикутника), то побудова може бути такою:

1) Проводимо пряму M_1L_1.

2) Проводимо перпендикуляр з точки H до M_1L_1. Отримуємо точку H_1 — основу висоти AH_1 даного трикутника.

3) Подвоюємо HH_1 і отримуємо вершину A трикутника.

4) З вершини A проводимо пряму, паралельну до M_1L_1, а з точки M_1 — перпендикулярну до M_1L_1. Отримуємо точку O.

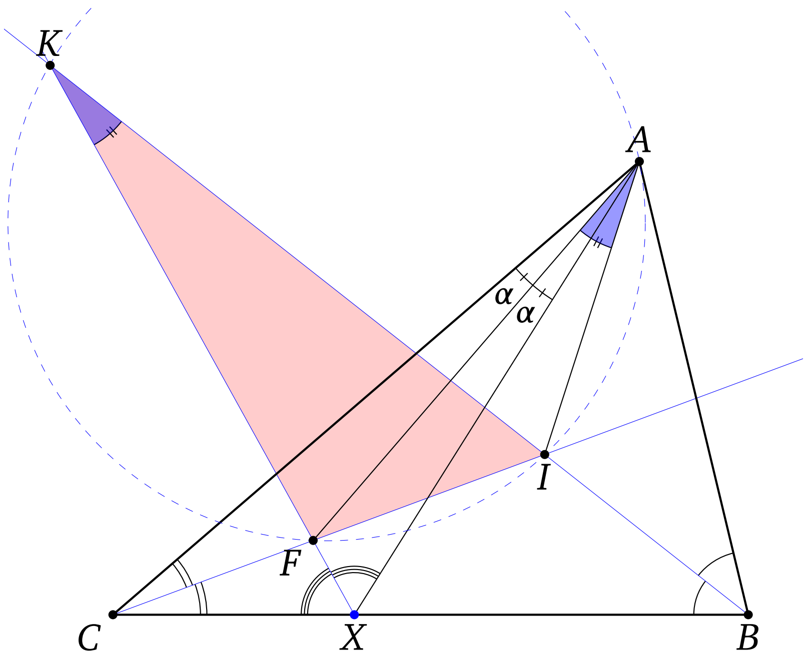
5) Коло з центром O та радіусом OA перетинає пряму M_1L_1 у вершинах B і C.

Шуканий трикутник ABC побудовано.

4. Нехай X — довільна точка на стороні BC трикутника ABC. Трикутник T утворено бісектрисами кутів ABC, ACB та AXC. Доведіть, що описане коло трикутника T, проходить через вершину A.

(*Дмитро Прокопенко*)

Розв'язання.



Нехай бісектриси кутів ABC та ACB перетинаються в точці I, бісектриси кутів ACB та AXC — в точці F, а бісектриси кутів ABC та AXC — в точці K.

Оскільки F — інцентр трикутника AXC, то AF — третя бісектриса у цьому трикутнику.

Нехай $\angle CAF = \angle FAX = \alpha$. Тоді

$$\angle FAI = \frac{\angle A}{2} - \alpha \quad \left(\text{бо } \angle BAI = \angle CAI = \frac{\angle A}{2}\right).$$

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}\ \left(I \text{ — інцентр } \triangle ABC\right) \Rightarrow \angle FIK = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}.$$

$$\angle CFX = 90^\circ + \alpha\ \left(F \text{ — інцентр } \triangle AXC\right) \Rightarrow \angle IFK = 90^\circ + \alpha.$$

З трикутника FKI дістаємо

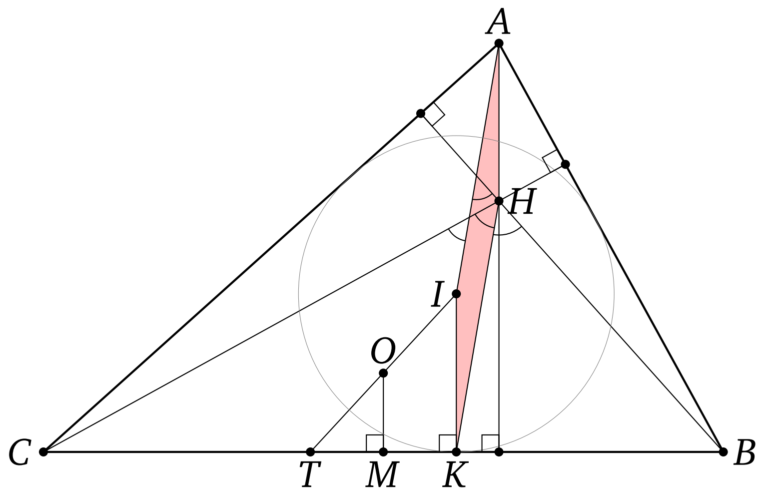
$$\angle FKI = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\angle A}{2}\right) - (90^\circ + \alpha) =$$
$$= \frac{\angle A}{2} - \alpha.$$

Отже, оскільки $\angle FKI = \angle FAI$, то точки A, I, F, K лежать на одному колі.

5. У гострокутному трикутнику ABC точка I — інцентр, H — ортоцентр, O — центр описаного кола, K і T — точки дотику відповідно вписаного та зовнівписаного кіл зі стороною BC. Виявилося, що відрізок TI проходить через точку O. Доведіть, що HK є бісектрисою кута BHC.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання. Нехай M — середина BC. Відомо, що M також є серединою KT, а оскільки точка O лежить на TI та $OM \parallel IK$, то відрізок OM є середньою лінією у трикутнику TIK. Тому $IK = 2OM = AH$. Оскільки також $IK \parallel AH$ (обидва ці відрізки перпендикулярні до BC), то $AHKI$ — паралелограм. Звідси $AI \parallel HK$.



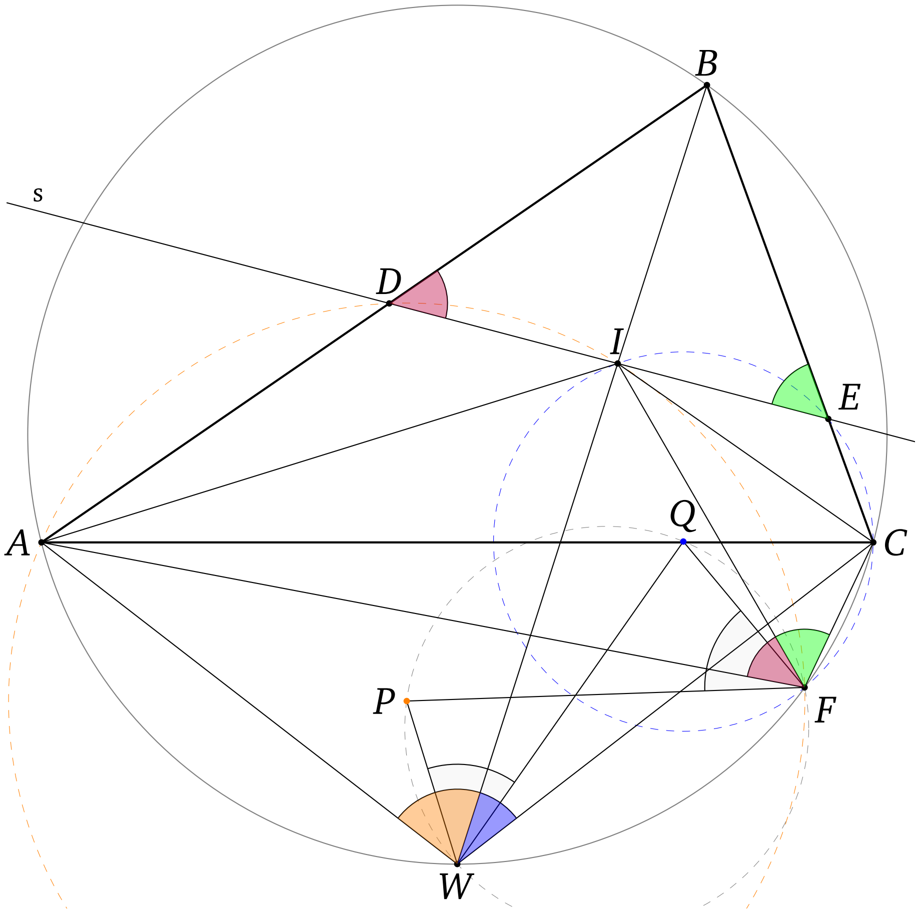
Оскільки $\angle ABH = 90^\circ - \angle A$, $\angle BAI = \frac{\angle A}{2}$, то кут між прямими BH та AI дорівнює $(90^\circ - \angle A) + \frac{\angle A}{2} = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$. Аналогічно кут між прямими CH та AI дорівнює $90^\circ - \frac{\angle A}{2}$. Оскільки $HK \parallel AI$, то HK теж утворює рівні кути з висотами BH та CH, а отже є бісектрисою кута BHC.

6. Нехай s — довільна пряма, яка проходить через інцентр трикутника ABC — точку I. Пряма s перетинає прямі AB та BC у точках D та E відповідно. Точки P та Q — центри описаних кіл DAI та CEI відповідно, а точка

F — друга точка перетину цих кіл. Доведіть, що описане коло трикутника PQF завжди проходить через сталу точку на площині незалежно від положення прямої s.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання.



Нехай пряма BI вдруге перетинає описане коло трикутника ABC у точці W. Доведемо, що описане коло трикутника PQF завжди проходить через точку W.

Оскільки $\angle IEB + \angle IDB = 180^\circ - \angle ABC$, $\angle IEB = \angle IFC$ та $\angle IDB = \angle IFA$, то

$$180^\circ - \angle ABC = \angle IEB + \angle IDB = \angle IFC + \angle IFA = \angle CFA.$$

Отже, точки A, B, C, F лежать на одному колі. $\quad (\star)$

За теоремою про тризуб $WA = WI = WC$. Тоді з міркувань симетрії пряма WP буде бісектрисою кута AWI, а WQ буде бісектрисою кута CWI. Тоді

$$\angle PWQ = \frac{\angle AWC}{2} = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}.$$

Нехай точки P та Q лежать по один бік від прямої IF (для інших конфігурацій все розглядається аналогічно або перераховується орієнтованими кутами). У цьому випадку

$$\angle PFI = 90^\circ - \angle FAI = 90^\circ - \angle FAC - \angle CAI,$$

$$\angle QFI = 90^\circ - \left(180^\circ - \angle FCI\right) = \angle FCA + \angle ACI - 90^\circ.$$

Тому

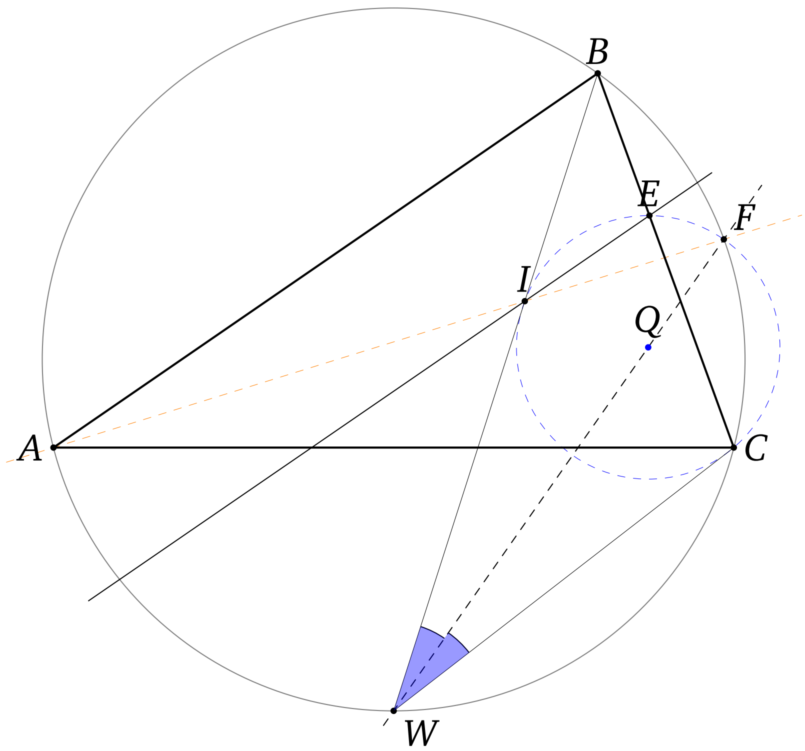
$$\angle PFQ = \angle PFI - \angle QFI = 180^\circ - \angle CAI - \angle ACI - \left(\angle FAC + \angle FCA\right).$$

Враховуючи ($\star$), дістаємо, що $\angle FAC + \angle FCA = \angle B$. Тоді

$$\angle PFQ = 180^\circ - \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle C}{2} - \angle B = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}.$$

Отже, $\angle PFQ = \angle PWQ$, а це означає, що точки P, Q, F, W справді лежать на одному колі.

Зауваження: *Якщо пряма s є паралельною прямій AB, то дістаємо таку конфігурацію (див. рисунок).*



Точка D є нескінченно віддаленою і описане коло трикутника DAI вироджується у пряму AI. “Центр” цього кола — теж нескінченно віддалена точка, яка лежить на серединному перпендикулярі до AI.

За аналогією до попереднього розв'язку, описане коло трикутника CEI та пряма AI також перетинаються на описаному колі трикутника ABC. Описане коло трикутника PQF вироджується у пряму QF, і тепер потрібно довести, що QF проходить через точку W. Це нескладно показати завдяки тому, що і WQ, і WF є бісектрисами кута BWC.

Якщо $s \parallel BC$, ситуація цілком аналогічна.

10–11 класи

1. Від трикутника ABC залишилися лише інцентр I, точка K дотику вписаного кола зі стороною AB, а також центр I_a зовнівписаного кола, яке дотикається до сторони BC. Побудуйте трикутник, рівновеликий до трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

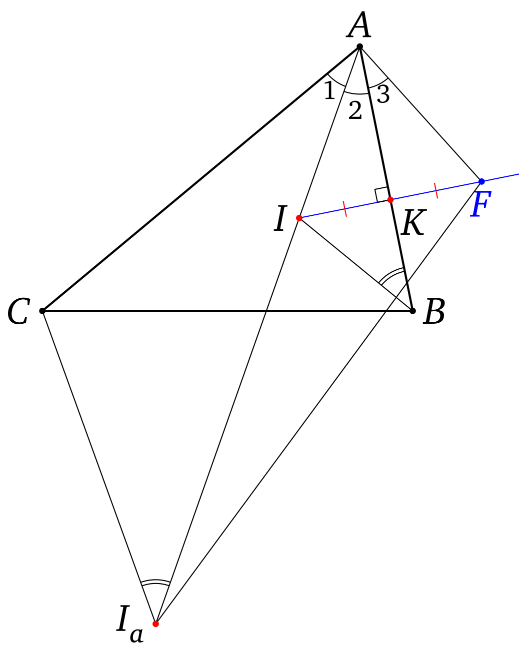
Розв'язання. Спочатку опишемо кроки побудови:

1) проводимо промінь IK;

2) відкладаємо на продовженні IK за точку K відрізок $KF = IK$;

3) проводимо пряму, яка проходить через точку K перпендикулярно до IK, та пряму II_a. Вони перетинаються у точці A.

4) з'єднуємо точки I_a та F.



Доведемо, що утворений трикутник AFI_a рівновеликий із трикутником ABC.

Очевидно, що $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \frac{\angle A}{2}$, $\angle IAF = \angle A$ та $AF = AI$.

Трикутники ABI та AI_aC подібні за двома кутами ($\angle AI_aC = \frac{\angle B}{2}$).

Нехай $AC = b$, $AB = c$. Тоді

$$\frac{AI}{b} = \frac{c}{AI_a},$$

тобто $AI \cdot AI_a = bc$.

Отже,

$$S_{\triangle AFI_a} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot AI_a \cdot \sin\angle A = \frac{1}{2} \cdot AI \cdot AI_a \cdot \sin\angle A = \\ = \frac{1}{2} bc \sin\angle A = S_{\triangle ABC},$$

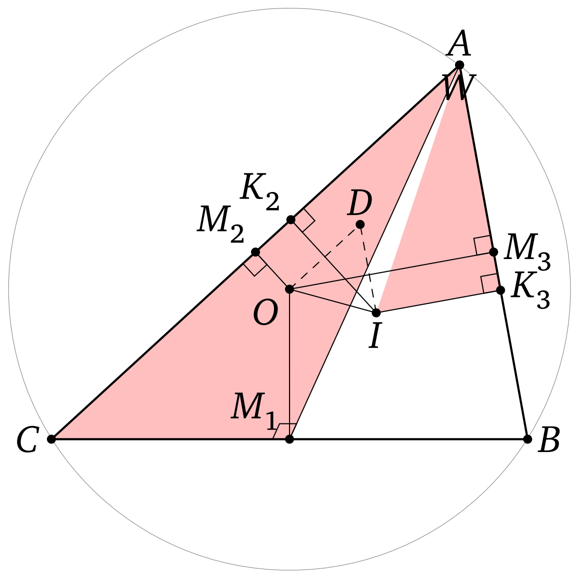
що і треба було довести.

Зауваження: *За точками I, K та I_a можна відновити і трикутник ABC — авжеж, рівновеликий сам собі. Для цього проведемо через точку K пряму ℓ, перпендикулярну до IK, та опустимо з точки K перпендикуляр I_aT на ℓ. Вершина A є точкою перетину прямих ℓ та II_a. Коло з центром I та радіусом IK — це вписане коло трикутника ABC, а коло з центром I_a та радіусом I_aT — зовнівписане коло цього трикутника. Якщо провести до цих* *кіл спільні внутрішні дотичні (це відома задача на побудову), одна з них перетне ℓ у точці B, а симетричну до ℓ відносно II_a пряму — в точці C.*

2. У гострокутному трикутнику ABC сума відстаней від вершин B і C до ортоцентра H дорівнює $4r$, де r — радіус кола, вписаного у цей трикутник. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо відомо, що $BC = a$.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання. **I спосіб.** Нехай M_1, M_2, M_3 — середини сторін BC, AC і AB відповідно, O та I — центри описаного та вписаного кіл, K_2, K_3 — точки дотику вписаного кола зі сторонами AC та BC. Оскільки $OM_2 = \frac{1}{2}BH$ та $OM_3 = \frac{1}{2}CH$ (відомий факт геометрії трикутника), то $OM_2 + OM_3 = 2r$. Якщо $OM_2 = OM_3 = r$, то O збігається з I та трикутник ABC рівносторонній. Цей трикутник задовольняє умову та має периметр $3a$.



Надалі нехай для визначеності $OM_2 = r - q$ та $OM_3 = r + q$, де $q > 0$. Покажемо, що $OI \perp AI$. Відмітимо точку D так, що $OD \parallel AC$ та $ID \parallel AB$. Тоді дві висоти трикутника OID дорівнюють q, тобто цей трикутник рівнобедрений. Отже, OI утворює однакові кути з AC та AB, звідки $OI \perp AI$.

Нехай бісектриса кута A вдруге перетинає описане коло у точці W. Оскільки $OI \perp AI$, то I — середина AW. Тому з теореми про тризуб випливає, що $WC = WI = IA$. Оскільки W — середина дуги BWC, то $WM_1 \perp BC$. Прямокутні трикутники AK_3I та CM_1W рівні за гострим кутом та гіпотенузою, тому $AK_3 = CM_1$. Отже, $p - a = \frac{a}{2}$, звідки $2p = 3a$.

II спосіб. Так само, як у I способі, дістаємо, що $OM_2 + OM_3 = 2r$.

За формулою Карно $OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r$, де R — радіус описаного кола трикутника ABC. Оскільки $OM_2 + OM_3 = 2r$, то $OM_1 = R - r$.

Бісектриса кута A перетинає описане коло в точці W — середині дуги $\smile BC$. Очевидно, що радіус OW проходить через середину M_1 відрізка BC. Отже, $M_1W = R - OM_1 = R - (R - r) = r = IK_3$, де I — центр вписаного кола, K_3 — точка дотику цього кола з AB.

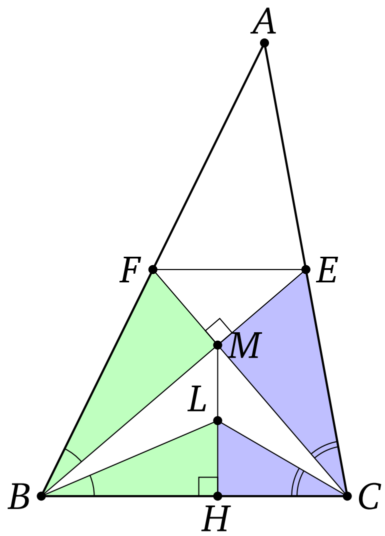
Прямокутні трикутники AK_3I та CM_1W рівні за гострим кутом і катетом. Отже, $AK_3 = CM_1$, або $p - a = \frac{a}{2}$, звідки $2p = 3a$.

Відповідь. $3a$.

3. Дано трикутник ABC, в якому медіани BE і CF перпендикулярні. Нехай M — точка перетину медіан цього трикутника, а L — його точка Лемуана (точка перетину прямих, симетричних до медіан відносно бісектрис відповідних кутів). Доведіть, що $ML \perp BC$.

(*Михайло Сидоренко*)

Розв'язання.



Опустимо перпендикуляр MH з точки M на BC. Відмітимо на промені HM точки L' та L'', для яких $\angle HBL' = \angle MBF$ та $\angle HCL'' = \angle MCE$ відповідно. Перевіримо, що $HL' = HL''$. Тоді точки L, L' та L'' збігаються, звідки $ML \perp BC$.

Прямокутні трикутники HBL' та MBF, HCL'' та MCE подібні, тому

$$HL' = MF \cdot \frac{BH}{BM}, \; HL'' = ME \cdot \frac{CH}{CM}.$$

Але $BH : CH = BM^2 : CM^2$ (проекції катетів прямокутного трикутника на гіпотенузу) та $ME : MF = BM : CM$ (бо $BC \parallel EF$). Звідси $HL' = HL''$, що завершує доведення.

4. У трикутнику ABC виконується співвідношення $AB + AC = 2BC$. Нехай I та M — інцентр та точка перетину медіан трикутника ABC, AL — його бісектриса, а точка P — ортоцентр трикутника BIC. Доведіть, що точки L, M, P лежать на одній прямій.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання.

Нехай $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, h_a — довжина висоти AH, r — радіус вписаного кола, а p — півпериметр трикутника ABC. Оскільки $2S_{\triangle ABC} = ah_a = 2pr$ та $2p = a + b + c = 3a$, то $h_a = 3r$.

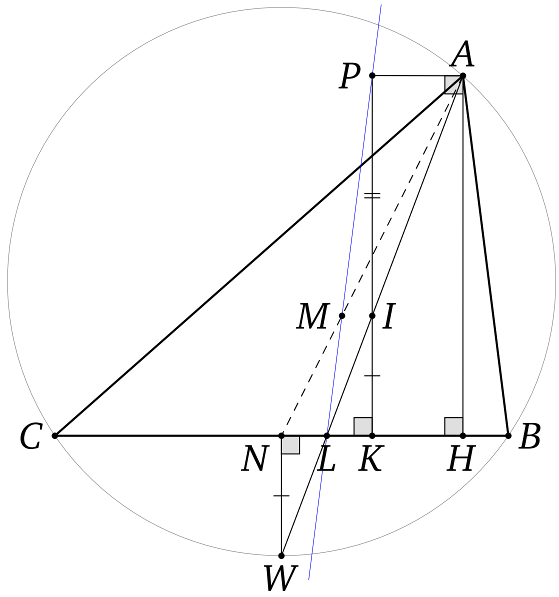
Нехай для визначеності $b > c$ (якщо $b = c$, то точки L, M, P лежать на серединному перпендикулярі до BC). Тоді $b - a = a - c > 0$.

За властивістю бісектриси $BL : CL = c : b$, тому $BL = \frac{c}{b+c} \cdot a = \frac{c}{2}$.

Нехай K — точка дотику вписаного кола з BC та N — середина BC. Тоді $BN = \frac{a}{2}$, $BK = p - b = \frac{a+c-b}{2}$. Звідси

$$LK = BL - BK = \frac{c}{2} - \frac{a+c-b}{2} = \frac{b-a}{2}, \; NL = BN - BL = \frac{a-c}{2},$$

а отже $NL = LK$. Це означає, що $\triangle WNL = \triangle IKL$ за катетом та гострим кутом, де W — друга точка перетину AI з описаним колом трикутника ABC. Тому $WN = IK = r$.



Для трикутника BIC точка W є центром описаного кола ($WI = WB = WC$), отже за властивістю ортоцентра $IP = 2WN = 2r$. А оскільки $h_a = 3r$, то $PK = IK + IP = 3r = h_a$. Таким чином, $AP \parallel BC$ та $APKH$ — прямокутник.

Прямокутні трикутники IKL та AHL подібні, отже $LK : LH = r : h_a = 1 : 3$. Тому $AP = KH = 2LK = 2NL$.

Нарешті, трикутники PAM та LNM подібні, бо $AP : NL = AM : NM = 2 : 1$ та $\angle PAM = \angle LNM$. Звідси $\angle PMA = \angle LMN$, тобто $P - M - L$ — одна пряма.

5. Нехай X — довільна точка на стороні BC трикутника ABC. Трикутник T утворено бісектрисами кутів ABC, ACB та AXC. Доведіть, що:

а) описане коло трикутника T, проходить через вершину A;

б) ортоцентр трикутника T належить прямій BC.

(*Дмитро Прокопенко*)

Розв'язання.

а) Нехай бісектриси кутів ABC та ACB перетинаються в точці I, бісектриси кутів ACB та AXC — в точці F, а бісектриси кутів ABC та AXC — в точці K.

Оскільки F — інцентр трикутника AXC, то AF — третя бісектриса у цьому трикутнику.

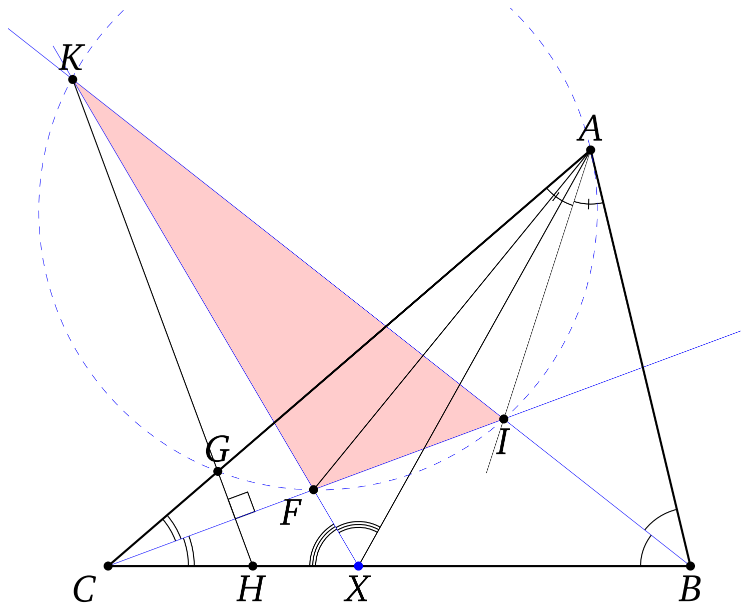
Маємо

$$\angle FKI = \angle XKB = \angle KXC - \angle KBC = \frac{1}{2}\angle AXC - \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle XAB,$$

$$\angle FAI = \angle CAI - \angle CAF = \frac{1}{2}\angle CAB - \frac{1}{2}\angle CAX = \frac{1}{2}\angle XAB.$$

Отже, $\angle FKI = \angle FAI$, тому точки A, I, F, K лежать на одному колі.

б) Нехай коло, на якому лежать точки A, I, F та K, вдруге перетинає AC у точці G, а пряма KG перетинає BC у точці H. Покажемо, що H — ортоцентр трикутника KFI.



Оскільки

$$\angle GKI + \angle KIF = \angle GAI + \angle IBC + \angle ICB = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB) = 90^\circ,$$

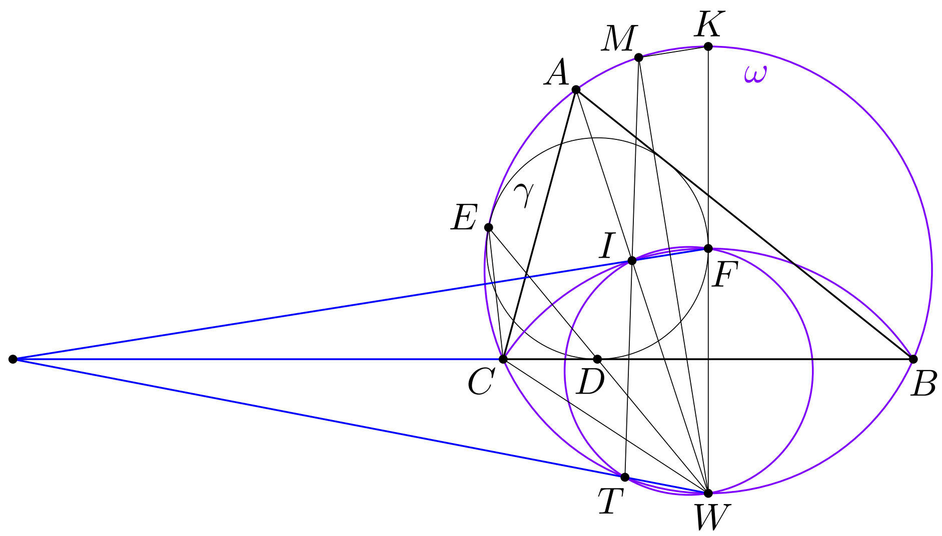
то $GK \perp FI$. Таким чином, пряма GK містить висоту трикутника KFI та G — точка перетину цієї висоти з описаним колом. Оскільки $GK \perp FI$, то точки G та H симетричні відносно сторони FI. Але точка перетину висоти з описаним колом є симетричною до ортоцентра відносно сторони, тому H і є ортоцентром.

6. Нехай ω — описане коло трикутника ABC, в якому $AC < AB$, K — середина дуги BAC, KW — діаметр кола ω. Коло γ вписане у криволінійний трикутник, утворений відрізками BC, AB та дугою AC кола ω. Виявилося, що коло γ також дотикається до KW у точці F. Нехай I — інцентр трикутника ABC, M — середина меншої дуги AK, а T — друга точка перетину MI з колом ω. Доведіть, що прямі FI, TW та BC перетинаються в одній точці.

(*Михайло Сидоренко*)

Розв'язання.

Нехай D, E — точки дотику кола γ з BC та з дугою AC. При гомотетії з центром E, яка переводить коло γ у коло ω, пряма BC переходить у дотичну до ω в точці W. Тому $E - D - W$ — одна пряма. Трикутники CDW та ECW подібні ($\angle CEW = \angle WCD = \angle WCB$ як вписані кути, що спираються на рівні дуги, кут при вершині W спільний), тому $CW : DW = EW : CW$, або $CW^2 = DW \cdot EW$. Але $DW \cdot EW = FW^2$ (квадрат дотичної), отже $FW = CW = IW = BW$ (теорема про тризуб). Таким чином, точки F, C, I та B лежать на колі з центром W.



Покажемо, що точки I, F, W, T також лежать на одному колі. Для цього обчислимо деякі кути. Нехай $\angle AWK = 2\alpha$. Оскільки M — середина дуги AK, то $\angle MWK = \alpha$. Але KW — діаметр ω, тому $\angle WMK = 90^\circ$, $\angle MKW = 90^\circ - \alpha$ та $\angle ITW = \angle MTW = 180^\circ - \angle MKW = 90^\circ + \alpha$. Трикутник IWF рівнобедрений, кут при його основі $\angle IFW = 90^\circ - \alpha$. Таким чином, $\angle IFW + \angle ITW = 180^\circ$. Отже, точки I, F, W, T лежать на одному колі.

Тоді WT, FI та BC — радикальні осі для кіл, описаних навколо чотирикутників $WTIF$, $WTCB$ та $BFIC$. Отже, вони або перетинаються в одній точці, або попарно паралельні. Але паралельні вони тоді, коли I та F збігаються. Це можливо лише при $AB = AC$, що суперечить умові задачі. Отже, прямі WT, FI та BC перетинаються в одній точці.