8 клас

1. Нехай BE та CF — медіани гострокутного трикутника ABC. На прямій BC обрали точки $K \neq B$ та $L \neq C$ такі, що $BE = EK$ та $CF = FL$. Доведіть, що $AK = AL$.

2. Нехай I та O — центри вписаного та описаного кіл трикутника ABC, у якому $\angle A < \angle B < \angle C$. Точки P та Q такі, що $AIOP$ та $BIOQ$ — рівнобічні трапеції ($AI \parallel OP$, $BI \parallel OQ$). Доведіть, що $CP = CQ$.

3. Нехай W — середина дуги BC описаного кола трикутника ABC, яка не містить точку A. На сторонах AB та AC відмітили точки P та Q відповідно так, що $APWQ$ паралелограм, а на стороні BC точки K та L так, що $BK = KW$ та $CL = LW$. Доведіть, шо прямі AW, KQ та LP перетинаються в одній точці.

4. На стороні AB рівнобічної трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) відмітили точки E та F так, що у чотирикутник $CDEF$ можна вписати коло. Доведіть, що описані кола трикутників ADE та BCF дотикаються.

5. На стороні AC трикутника ABC відмітили точку P так, що $AP = \frac{1}{3}AC$, а на відрізку BP точку S так, що $CS \perp BP$. Точка T є такою, що $BCST$ паралелограм. Доведіть, що $AB = AT$.

22 грудня 2024 року

9 клас

1. Всередині трикутника ABC обрали точку D так, що $\angle ADB = \angle ADC$. Промені BD та CD перетинають описане коло трикутника ABC у точках E та F відповідно. На відрізку EF обрали точки K та L так, що $\angle AKD = 180° - \angle ACB$ та $\angle ALD = 180° - \angle ABC$, причому відрізки EL та FK не перетинають пряму AD. Доведіть, що $AK = AL$.

2. Нехай M — середина сторони BC трикутника ABC, D — довільна точка на дузі BC описаного кола, яка не містить точку A, N — середина AD. Коло, яке проходить через точки A, N і дотикається до AB, перетинає сторону AC у точці E. Доведіть, шо точки C, D, E та M лежать на одному колі.

3. Нехай H — ортоцентр гострокутного трикутника ABC, AT — діаметр кола, описаного навколо цього трикутника. На сторонах AC та AB відмітили точки X та Y так, що $TX = TY$ та $\angle XTY + \angle XAY = 90°$. Доведіть, що $\angle XHY = 90°$.

4. Нехай ω — описане коло трикутника ABC, у якому $AB > AC$. N — середина дуги $\smile BAC$, D — точка на колі ω, для якої $ND \perp AB$, а I — центр вписаного кола трикутника ABC. Відновіть трикутник ABC, якщо дано лише точки A, I та D.

5. Нехай AL — бісектриса трикутника ABC, O — центр кола, описаного навколо цього трикутника, D та E — середини BL та CL відповідно. На відрізках AD та AE відмітили точки P та Q так, що $APLQ$ паралелограм. Доведіть, що $PQ \perp AO$.

22 грудня 2024 року

10–11 класи

1. Нехай I та O — центри вписаного та описаного кіл прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), K — точка дотику вписаного кола з AC, а P та Q — точки перетину описаного кола трикутника AOK з OC та з описаним колом трикутника ABC відповідно. Доведіть, що точки C, I, P та Q лежать на одному колі.

2. Нехай O та H — центр описаного кола та ортоцентр гострокутного трикутника ABC. На сторонах AC та AB відмітили точки D та E відповідно так, що відрізок DE проходить через точку O та $DE \parallel BC$. На стороні BC обрали точки X та Y такі, що $BX = OD$ та $CY = OE$. Доведіть, що $\angle XHY + 2\angle BAC = 180°$.

3. Всередині трикутника ABC обрали точки D та E такі, що $\angle ABD = \angle CBE$ та $\angle ACD = \angle BCE$. Точка F на стороні AB є такою, що $DF \parallel AC$, а точка G на стороні AC є такою, що $EG \parallel AB$. Доведіть, що $\angle BFG = \angle BDC$.

4. Нехай I та M — інцентр та точка перетину медіан нерівнобедреного трикутника ABC. Пряма, яка проходить через точку I паралельно до BC, перетинає AC та AB у точках E та F відповідно. Відновіть трикутник ABC, якщо дано лише точки E, F, I та M.

5. Нехай $ABCDEF$ — вписаний шестикутник, причому $AD \parallel EF$. На діагоналях AE та DF відмітили точки X та Y відповідно так, що $CX = EX$ та $BY = FY$. Нехай O — точка перетину AE та FD, P — точка перетину CX та BY, Q — точка перетину BF та CE. Доведіть, що точки O, P, Q лежать на одній прямій.

22 грудня 2024 року