8 клас

1. Нехай BE та CF — медіани гострокутного трикутника ABC. На прямій BC обрали точки $K \neq B$ та $L \neq C$ такі, що $BE = EK$ та $CF = FL$. Доведіть, що $AK = AL$.

(*Георгій Жилінський*)

Розв'язання. I спосіб. Нехай AA_1, EE_1 та FF_1 — висоти трикутників ABC, BEK та CFL (рис. 1). Оскільки $EE_1 \parallel AA_1 \parallel FF_1$, то EE_1, FF_1 — середні лінії трикутників AA_1C та AA_1B. Позначимо $BF_1 = F_1A_1 = x$ та $A_1E_1 = E_1B = y$. Оскільки трикутники BEK та CFL рівнобедрені, то E_1, F_1 — середини BK та CL. Звідси $E_1K = BE_1 = 2x + y$, $LF_1 = F_1C = x + 2y$, а тому $LA_1 = A_1K = 2x + 2y$. Отже, у трикутнику KAL висота AA_1 є медіаною, звідки $AK = AL$.

II спосіб. Відкладемо на продовженні BE відрізок $EN = BE$, а на продовженні CF відрізок $FM = CF$ (рис. 2). Тоді $ABCN$ та $ACBM$ паралелограми, звідки $MA = BC = AN$, $MA \parallel BC$ та $AN \parallel BC$. Тому $MN \parallel BC$ та A — середина MN. У трикутнику BNK медіана KE дорівнює половині сторони BN, тому цей трикутник прямокутний. Отже, $NK \perp BC$ та аналогічно $ML \perp BC$. Звідси випливає, що $KLMN$ прямокутник. Оскільки A — середина MN, то прямокутні трикутники ANK та AML рівні за двома катетами, звідки $AK = AL$.

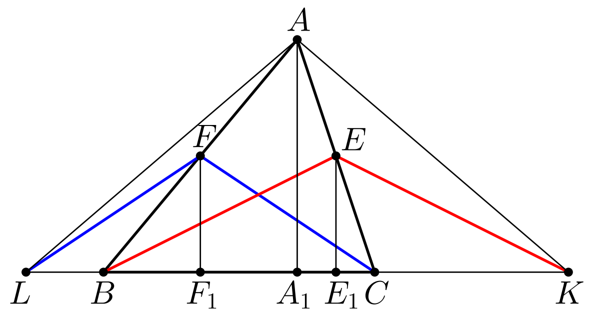

Рис. 1.

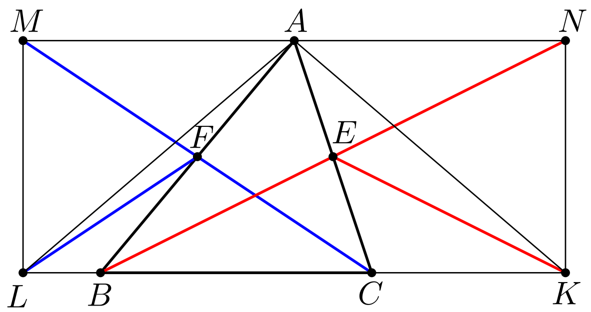

Рис. 2.

2. Нехай I та O — центри вписаного та описаного кіл трикутника ABC, у якому $\angle A < \angle B < \angle C$. Точки P та Q такі, що $AIOP$ та $BIOQ$ — рівнобічні трапеції ($AI \parallel OP$, $BI \parallel OQ$). Доведіть, що $CP = CQ$.

(*Володимир Брайман та Матвій Курський*)

Розв'язання. Діагоналі рівнобічної трапеції рівні, тому $IP = AO = BO = IQ$ (рис. 3). Доведемо, що $\angle CIP = \angle CIQ$. Звідси випливатиме, що трикутники CIP та CIQ рівні за двома сторонами та кутом між ними, а отже $CP = CQ$.

Позначимо $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ та $\angle C = \gamma$, $\alpha < \beta < \gamma$. У рівнобедреному трикутнику AOC кут при вершині дорівнює 2β, а кут при основі $\angle CAO =$

$90^\circ - \beta > 90^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \frac{\alpha}{2} = \angle CAI$. Аналогічно $\angle CBO = 90^\circ - \alpha > \frac{\beta}{2} = \angle BCI$. Тому точка O лежить всередині кута AIB, а отже точки P та Q лежать всередині кутів AIO та BIO відповідно. Звідси $\angle CIP = \angle CIA + \angle AIP$ та $\angle CIQ = \angle CIB + \angle BIQ$. Оскільки $\angle CIA = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$ та з рівнобічної трапеції $\angle AIP = \angle OAI = \angle CAO - \angle CAI = 90^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2}$, то

$$\angle CIP = 90^\circ + \frac{\beta}{2} + 90^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2},$$

аналогічно $\angle CIQ = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$, що завершує доведення.

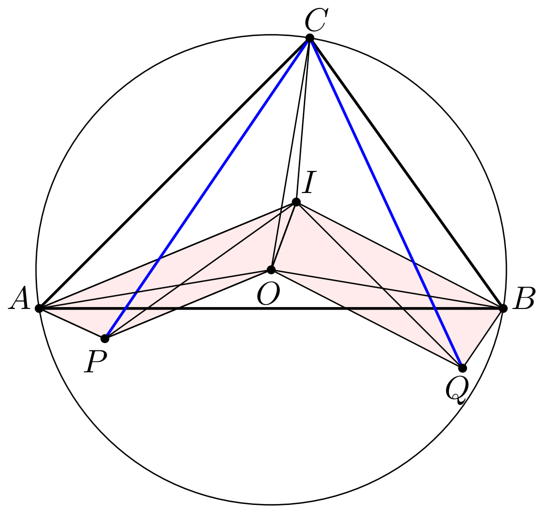

Рис. 3.

3. Нехай W — середина дуги BC описаного кола трикутника ABC, яка не містить точку A. На сторонах AB та AC відмітили точки P та Q відповідно так, що $APWQ$ паралелограм, а на стороні BC точки K та L так, що $BK = KW$ та $CL = LW$. Доведіть, що прямі AW, KQ та LP перетинаються в одній точці.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання. Нехай $\angle BAC = 2\alpha$. Оскільки трикутник BKW рівнобедрений (рис. 4), то

$$\angle BWK = \angle WBC = \angle WAC = \alpha.$$

Звідси

$$\angle WKC = \angle BWK + \angle WBC = 2\alpha.$$

Оскільки $WQ \parallel AB$, то

$$\angle WQC = 2\alpha = \angle WKC,$$

отже чотирикутник $WKQC$ вписаний. Аналогічно чотирикутник $WBPL$ вписаний. Звідси $\angle WPL = \angle WCL = \alpha$ та $\angle KQW = \angle KCW = \alpha$, а тому $\angle BPL =$

$\angle CQK = 3\alpha$. Оскільки діагональ паралелограма $APWQ$ є бісектрисою кута A, то $APWQ$ це ромб. Нехай прямі PL та QK перетинають AW у точках D' та D'' відповідно. Оскільки $AP = AQ$, $\angle PAD' = \angle QAD'' = \alpha$ та $\angle APD' = \angle AQD'' = 180° - 3\alpha$, то трикутники APD' та AQD'' рівні. Тому $AD' = AD''$, тобто точки D' та D'' збігаються.

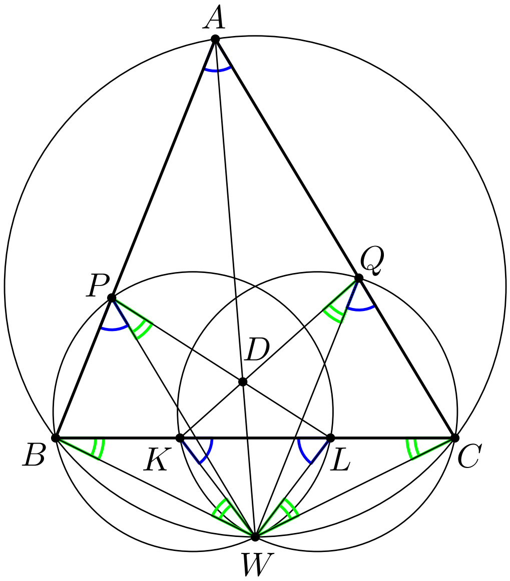

Рис. 4.

4. На стороні AB рівнобічної трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) відмітили точки E та F так, що у чотирикутник $CDEF$ можна вписати коло. Доведіть, що описані кола трикутників ADE та BCF дотикаються.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання. Нехай ω — коло, вписане у чотирикутник $CDEF$, ω_1 та ω_2 — описані кола трикутників ADE та BCF, O, O_1 та O_2 — центри кіл ω, ω_1 та ω_2 відповідно, а S — точка перетину прямих AB і CD (рис. 5). Точка O лежить на бісектрисі кута ASD, яка є серединним перпендикуляром до відрізків AD та BC. Тому точки O_1 та O_2 теж лежать на цій бісектрисі. Покажемо, що кола ω_1 та ω_2 проходять через точку O. Оскільки центри цих кіл лежать на одній прямій з точкою O, це означатиме, що O — точка дотику кіл ω_1 та ω_2.

Позначимо $\angle ASD = \alpha$. Тоді

$$\angle SAD = \angle SBC = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Оскільки коло ω вписане у трикутник ESD, то $\angle EOD = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Отже,

$$\angle EOD + \angle EAD = 180°,$$

тобто точка O належить колу ω_1. Аналогічно оскільки коло ω є зовнівписаним для трикутника FSC, то $\angle FOC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Звідси

$$\angle FOC + \angle FBC = 180^\circ,$$

тобто точка O належить і колу ω_2.

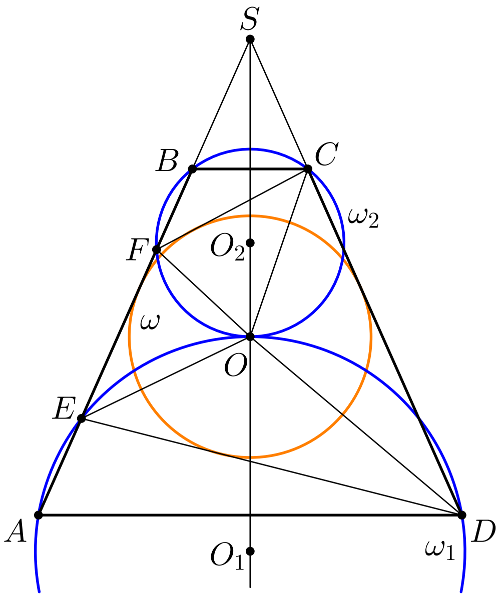

Рис. 5.

5. На стороні AC трикутника ABC відмітили точку P так, що $AP = \frac{1}{3}AC$, а на відрізку BP точку S так, що $CS \perp BP$. Точка T є такою, що $BCST$ паралелограм. Доведіть, що $AB = AT$.

(*Богдан Желябовський*)

Розв'язання. Відкладемо на продовженні BC за точку B відрізок $BD = DC$, а на продовженні AC за точку A відрізок $AQ = AP$ (рис. 6). Тоді $PQ = \frac{2}{3}AC = CP$, а тому BP — середня лінія T трикутника CDQ. Звідси $DQ \parallel BP$.

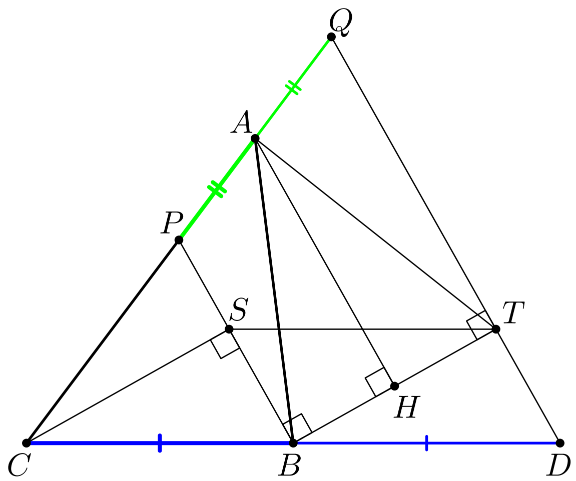

Рис. 6.

Оскільки $BD = BC = ST$ та $BD \parallel ST$, то $BSTD$ паралелограм. Звідси $TD \parallel BP$, отже $D - T - Q$ — одна пряма та $BP \parallel TQ$. Оскільки $BT \parallel CS$ та $CS \perp BP$, то $PB \perp BT$. Отже, $PBTQ$ це прямокутна трапеція. Нехай AH — висота трикутника ABT. Тоді $AH \parallel BP$ та A — середина PQ, тобто AH — середня лінія трапеції $PBTQ$. Тому H — середина BT. Таким чином, у трикутнику ABT висота AH є медіаною, звідки $AB = AT$.

9 клас

1. Всередині трикутника ABC обрали точку D так, що $\angle ADB = \angle ADC$. Промені BD та CD перетинають описане коло трикутника ABC у точках E та F відповідно. На відрізку EF обрали точки K та L так, що $\angle AKD = 180^\circ - \angle ACB$ та $\angle ALD = 180^\circ - \angle ABC$, причому відрізки EL та FK не перетинають пряму AD. Доведіть, що $AK = AL$.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання. Оскільки $\angle AED = \angle ACB = 180^\circ - \angle AKD$, причому точки K, E лежать по різні сторони від AD, то чотирикутник $AKDE$ вписаний. Аналогічно чотирикутник $ALDF$ вписаний. Звідси

$$\angle AKL = \angle ADE = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - \angle ADC = \angle ADF = \angle ALK.$$

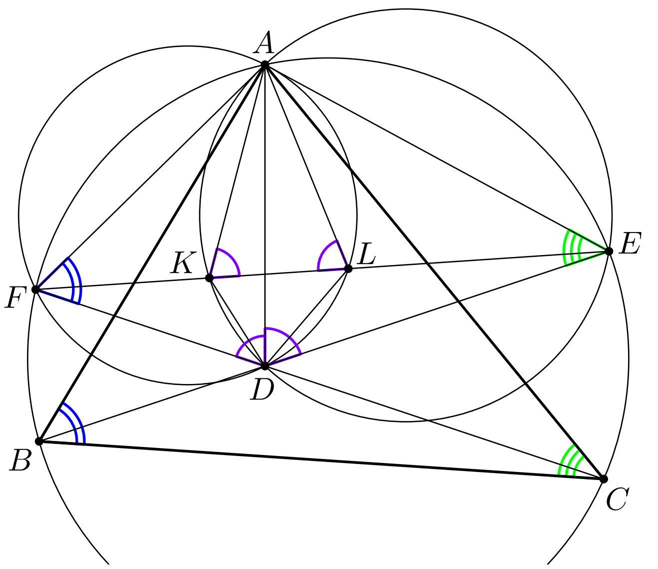

Рис. 1.

2. Нехай M — середина сторони BC трикутника ABC, D — довільна точка на дузі BC описаного кола, яка не містить точку A, N — середина AD. Коло, яке проходить через точки A, N і дотикається до AB, перетинає сторону AC у точці E. Доведіть, шо точки C, D, E та M лежать на одному колі.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання. Оскільки $\angle NAE = \angle DAC = \angle DBC$ та $\angle NEA = \angle BAD = \angle BCD$ (рис. 2), то трикутники AEN та BCD подібні. Нехай K — середина AE. Оскільки NK та DM — відповідні медіани у подібних трикутниках, то $\angle NKE = \angle DMC$. Але NK — середня лінія трикутника DAE, тому $NK \parallel DE$.

Звідси $\angle DEC = \angle NKE = \angle DMC$, отже точки C, D, E та M лежать на одному колі.

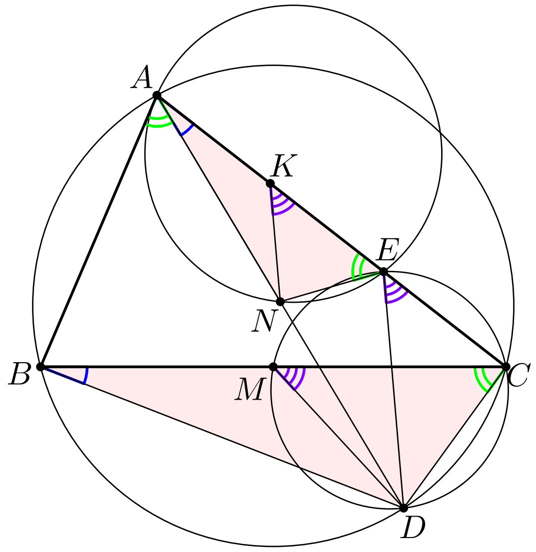

Рис. 2.

3. Нехай H — ортоцентр гострокутного трикутника ABC, AT — діаметр кола, описаного навколо цього трикутника. На сторонах AC та AB відмітили точки X та Y так, що $TX = TY$ та $\angle XTY + \angle XAY = 90^\circ$. Доведіть, що $\angle XHY = 90^\circ$.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання. Оскільки AT — діаметр, то $\angle ABT = \angle ACT = 90^\circ$. Покажемо, що прямокутні трикутники XCT та TBY рівні (рис. 3). Справді, $XT = TY$ за умовою, а оскільки $\angle CTX + \angle BTY = \angle CTB - \angle XTY = 180^\circ - \angle XAY - \angle XTY = 90^\circ$, то $\angle CXT = \angle BTY$.

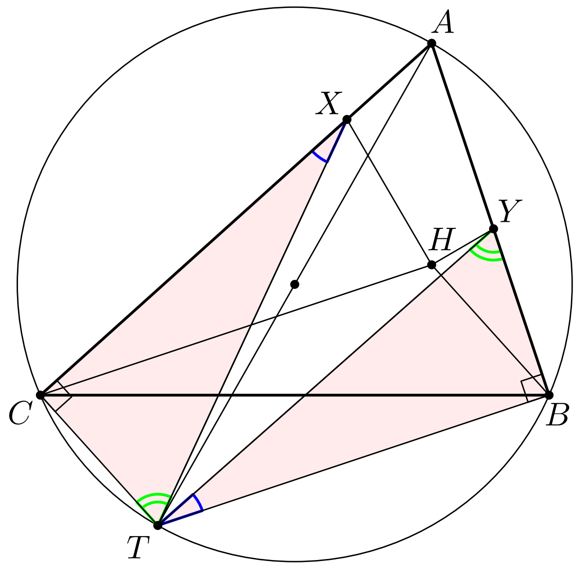

Рис. 3.

Звідси $CX = BT$ та $BY = CT$. Але $CH \perp AB$ та $TB \perp AB$, тому $TB \parallel CH$ та аналогічно $TC \parallel BH$. Таким чином, $BHCT$ паралелограм, звідки $BH = CT = BY$ та $CH = BT = CX$. Нехай $\angle BAC = \alpha$. Тоді $\angle BHC = 180^\circ - \alpha$. Оскільки $\angle ACH = \angle ABH = 90^\circ - \alpha$, то з рівнобедрених трикутників BHY та CHX знаходимо $\angle BHY = \angle CHX = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Таким чином,

$$\angle XHY = 360^\circ - \angle BHC - \angle BHY - \angle CHX = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - 2(45^\circ + \tfrac{\alpha}{2}) = 90^\circ.$$

4. Нехай ω — описане коло трикутника ABC, у якому $AB > AC$. N — середина дуги $\smile BAC$, D — точка на колі ω, для якої $ND \perp AB$, а I — центр вписаного кола трикутника ABC. Відновіть трикутник ABC, якщо дано лише точки A, I та D.

(*Олексій Карлюченко та Григорій Філіпповський*)

Розв'язання. Нехай NW — діаметр кола ω (рис. 4). Оскільки $DW \perp ND$ та $AB \perp ND$, то $DW \parallel AB$. Тому $\smile AD = \smile BW$, а отже $AD = BW$. За теоремою про "тризуб" $IW = BW = CW$. Звідси випливає така побудова:

1) відкладаємо на продовженні AI за точку I відрізок $IW = AD$ та дістаємо точку W;

2) будуємо коло ω як описане коло трикутника ADW;

3) коло з центром W та радіусом WI перетинає коло ω у точках B та C.

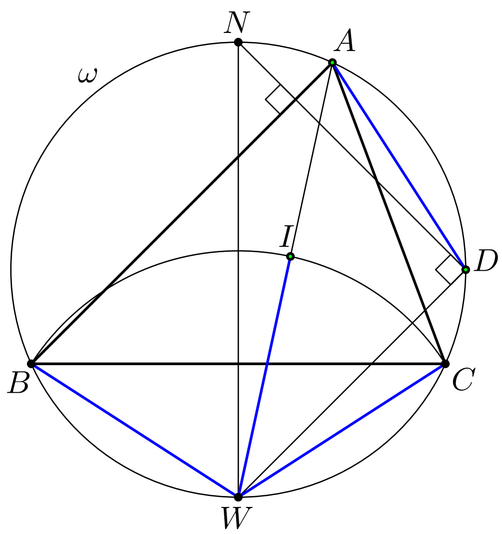

Рис. 4.

5. Нехай AL — бісектриса трикутника ABC, O — центр кола, описаного навколо цього трикутника, D та E — середини BL та CL відповідно. На відрізках AD та AE відмітили точки P та Q так, що $APLQ$ паралелограм. Доведіть, що $PQ \perp AO$.

(*Михайло Плотніков*)

Розв'язання. Якщо $AB = AC$, то твердження є очевидним. Надалі будемо без обмеження загальності вважати, що $\frac{AB}{AC} = t > 1$.

Нехай T — точка перетину діагоналей паралелограма $APLQ$ (рис. 5). Доведемо, що PQ — дотична до описаного кола трикутника TDE. Оскільки трикутники TDE та ABC гомотетичні, звідси випливатиме, що пряма PQ паралельна дотичній, проведеній до описаного кола трикутника ABC в точці A, а отже перпендикулярна до радіуса AO.

Нехай пряма PQ перетинає BC у точці F, а дотична, проведена до описаного кола трикутника TDE в точці T, перетинає BC у точці F'. Покажемо, що $F' = F$. Обидві точки F та F' лежать поза відрізком BC, тому достатньо показати, що $\frac{DF}{EF} = \frac{DF'}{EF'}$.

За властивістю бісектриси $\frac{DL}{EL} = \frac{BL}{CL} = \frac{AB}{AC} = t$. Оскільки $PL \parallel AE$ та $QL \parallel AD$, то за теоремою про пропорційні відрізки $\frac{DP}{PA} = \frac{AQ}{QE} = \frac{DL}{EL} = t$. За теоремою Менелая $\frac{DP}{PA} \cdot \frac{AQ}{QE} \cdot \frac{EF}{DF} = 1$, отже $\frac{DF}{EF} = \frac{DP}{PA} \cdot \frac{AQ}{QE} = t^2$. Оскільки $\angle ETF' = \angle F'DT$, то трикутники ETF' та $F'DT$ подібні. Звідси $\frac{TF'}{EF'} = \frac{DF'}{TF'} = \frac{DT}{ET} = \frac{AB}{AC} = t$, отже $\frac{DF'}{EF'} = \frac{DF'}{TF'} \cdot \frac{TF'}{EF'} = t^2 = \frac{DF}{EF}$, що завершує доведення.

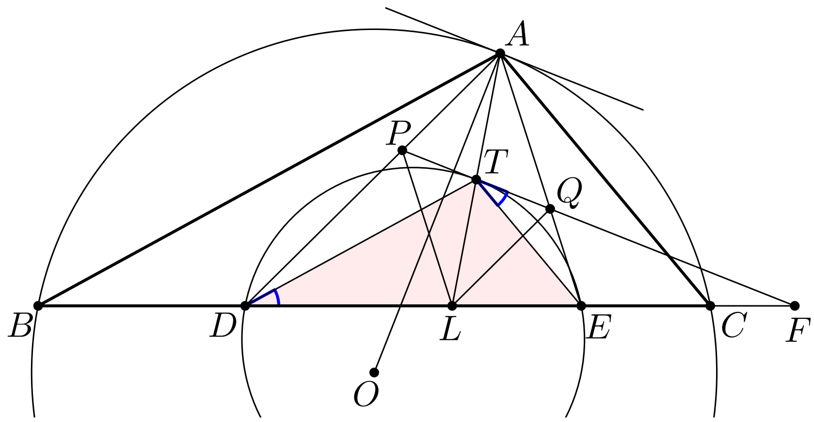

Рис. 5.

10–11 класи

1. Нехай I та O — центри вписаного та описаного кіл прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), K — точка дотику вписаного кола з AC, а P та Q — точки перетину описаного кола трикутника AOK з OC та з описаним колом трикутника ABC відповідно. Доведіть, що точки C, I, P та Q лежать на одному колі.

(*Михайло Сидоренко*)

Розв'язання. Оскільки CIK — прямокутний трикутник з кутом $45°$, то $IK = CK$. Чотирикутник $AKPO$ вписаний, тому $\angle KPC = 180° - \angle KPO = \angle KAO = \angle ACO$ (рис. 1). Тому трикутник KPC рівнобедрений, звідки $PK = CK$. Таким чином, K — центр описаного кола трикутника CIP. Залишається довести, що точка Q теж лежать на цьому колі, тобто $QK = PK$.

Оскільки $\angle QAP = \angle QOP = \angle QOC = 2\angle QAC$, то AC є бісектрисою кута QAP. Звідси K — середина дуги $\smile QKP$, а отже $QK = PK$.

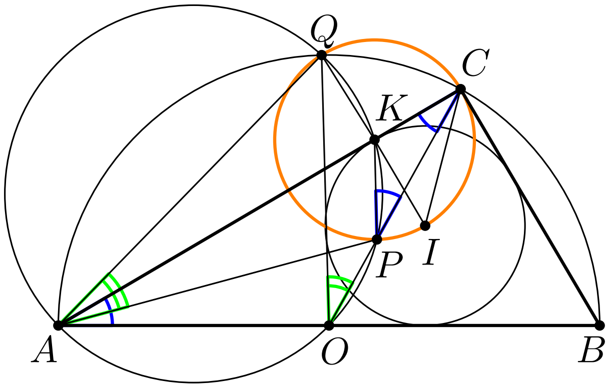

Рис. 1.

2. Нехай O та H — центр описаного кола та ортоцентр гострокутного трикутника ABC. На сторонах AC та AB відмітили точки D та E відповідно так, що відрізок DE проходить через точку O та $DE \parallel BC$. На стороні BC обрали точки X та Y такі, що $BX = OD$ та $CY = OE$. Доведіть, що $\angle XHY + 2\angle BAC = 180°$.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання. I спосіб. Покажемо, що $HY = CY$. Для цього проведемо перпендикуляри $OM \perp AB$ та $YN \perp CH$ (рис. 2). Оскільки O — ортоцентр трикутника, утвореного середніми лініями трикутника ABC, то $CH \parallel OM$ та $CH = 2OM$. Прямокутні трикутники OME та CNY рівні за катетом і гострим кутом ($OE = CY$ за умовою, $\angle MOE = \angle NCY$, бо відповідні сторони цих кутів паралельні). Тому $CN = OM = \frac{1}{2}CH$. Отже, у трикутнику CYH висота YN є медіаною, звідки $HY = CY$. Тому

$$\angle HYX = 2\angle HCB = 2(90° - \angle ABC) = 180° - 2\angle ABC.$$

Аналогічно $HX = XB$, звідки $\angle HXY = 180^\circ - 2\angle ACB$. Тому

$$\angle XHY = 180^\circ - \angle HYX - \angle HXY = 2\angle ABC + 2\angle ACB - 180^\circ = 180^\circ - 2\angle BAC.$$

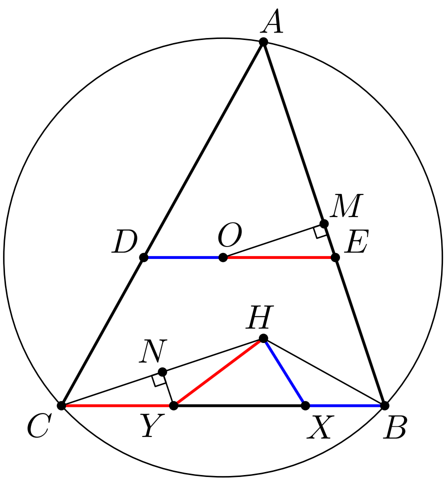

Рис. 2.

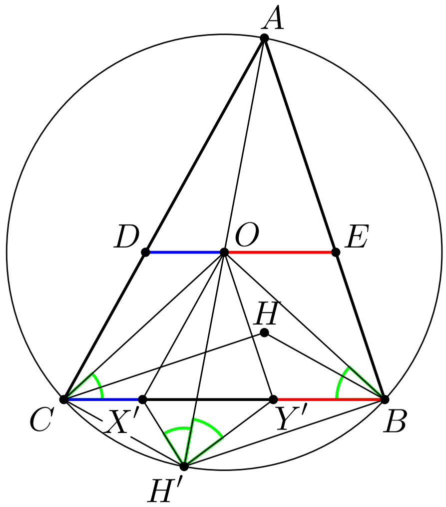

Рис. 3.

II спосіб. Нехай точки H', X' та Y' симетричні до H, X та Y відносно середини сторони BC (рис. 3). Оскільки $CH \perp AB$, $BH \perp AC$ та $BHCH'$ паралелограм, то $\angle ABH' = \angle ACH' = 90^\circ$, отже AH' є діаметром кола, описаного навколо трикутника ABC. Оскільки $CX' = BX = OD$ та $CX' \parallel OD$, то $ODCX'$ паралелограм. Звідси $OX' \parallel AC$, а отже $OX' \perp CH'$. Таким чином, точка X' лежить на висоті рівнобедреного трикутника OCH' ($OC = OH'$ як радіуси), а тому $\angle OH'X' = \angle OCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BOC) = 90^\circ - \angle BAC$. Аналогічно $\angle OH'Y' = 90^\circ - \angle BAC$, тому $\angle XHY = \angle X'H'Y' = \angle OH'X' + \angle OH'Y' = 180^\circ - 2\angle BAC$.

3. Всередині трикутника ABC обрали точки D та E такі, що $\angle ABD = \angle CBE$ та $\angle ACD = \angle BCE$. Точка F на стороні AB є такою, що $DF \parallel AC$, а точка G на стороні AC є такою, що $EG \parallel AB$. Доведіть, що $\angle BFG = \angle BDC$.

(*Антон Тригуб*)

Розв'язання. Нехай промені CD та BE перетинають описане коло трикутника ABC у точках P та Q, а відрізок PQ перетинає сторони AB і BC у точках F' та G' відповідно (рис. 4). Покажемо, що $F' = F$ та $G' = G$. Оскільки $\angle DPF' = \angle CPQ = \angle CBQ = \angle DBF'$, то точки B, P, F', D лежать на одному колі. Звідси $\angle BF'D = \angle BPC = \angle BAC$. Тому $DF' \parallel AC$, тобто $F' = F$. Аналогічно $G' = G$. Звідси випливає, що трикутники BFQ та BDC подібні ($\angle FBQ = \angle DBC$, $\angle FQB = \angle DCB$), а тому $\angle BFQ = \angle BDC$.

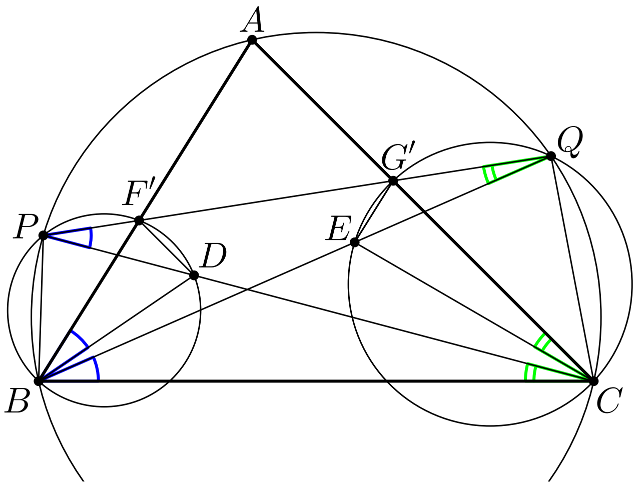

Рис. 4.

4. Нехай I та M — інцентр та точка перетину медіан нерівнобедреного трикутника ABC. Пряма, яка проходить через точку I паралельно до BC, перетинає AC та AB у точках E та F відповідно. Відновіть трикутник ABC, якщо дано лише точки E, F, I та M.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання. Позначимо T середину EF. Розглянемо два випадки.

Випадок 1. $T \neq M$. Нехай Q — точка перетину зовнішньої бісектриси кута BAC з прямою EF (рис. 5). За властивістю бісектрис $EQ : FQ = AE : AF = EI : FI$, отже точку Q можна побудувати. Оскільки пряма TM містить медіану AD та $\angle QAI = 90^\circ$, точку A знаходимо як точку перетину TM та півкола з діаметром QI.

Випадок 2. $T = M$. Точка I ділить бісектрису AL у відношенні

$$AI : IL = AM : MD = 2 : 1 = (AB + AC) : BC = (AF + AE) : FE.$$

Тому $AF = 2FI$ та $AE = 2EI$, тобто A є точкою перетину кіл з центрами E, F та радіусами $2EI$, $2FI$ відповідно.

Коли точку A знайдено, залишається побудувати точку D таку, що $AD = \frac{3}{2}AM$, та пряму, яка проходить через точку D паралельно до EF. Ця пряма перетинає промені AF та AE у точках B та C відповідно.

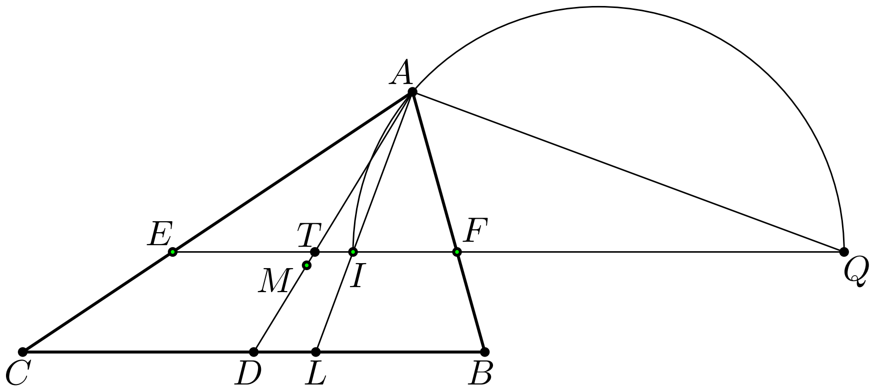

Рис. 5.

Зауваження. Точка A відновлюється, взагалі кажучи, не однозначно. Умову можуть задовольняти один з побудованих трикутників ABC або обидва.

5. Нехай $ABCDEF$ — вписаний шестикутник, причому $AD \parallel EF$. На діагоналях AE та DF відмітили точки X та Y відповідно так, що $CX = EX$ та $BY = FY$. Нехай O — точка перетину AE та FD, P — точка перетину CX та BY, Q — точка перетину BF та CE. Доведіть, що точки O, P, Q лежать на одній прямій.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання. Нехай K та L — точки перетину BF та CE з AD, а ω_1 та ω_2 — описані кола трикутників AKB та DLC відповідно (рис. 6). Покажемо, що точки O, P, Q лежать на радикальній осі кіл ω_1 та ω_2.

Оскільки $AFED$ — рівнобічна трапеція, то $\angle ABF = \angle ADF = \angle DAE = \angle DCE$. Тому AO, DO — дотичні до кіл ω_1 та ω_2, причому $AO = DO$. Отже, точка O лежить на радикальній осі кіл ω_1 та ω_2.

Оскільки $\angle YBF = \angle BFD = \angle BAD$, то BP — дотична до кола ω_1. Аналогічно CP — дотична до кола ω_2. Покажемо, що $\angle PBC = \angle PCB$. Звідси випливатиме, що $PB = PC$, а тому точка P лежить на радикальній осі кіл ω_1 та ω_2. Помітимо, що

$$\begin{aligned}\angle PBC =&\angle FBC - \angle BFD = \\ &= \tfrac{1}{2}(\smile FDC - \smile BCD) = \tfrac{1}{2}(\smile FED - \smile BC)\end{aligned}$$

та аналогічно

$$\angle PCB = \angle ECB - \angle AEC = \frac{1}{2}(\smile AFE - \smile BC).$$

Залишається зауважити, що $\smile FED = \smile AFE$, бо $AD \parallel EF$.

Нарешті, точки K, L, C, B лежать на одному колі, бо $\angle BKL = \angle BFE = 180^\circ - \angle BCE$. Позначимо це коло ω_3. Прямі BF та CE є радикальними осями кіл ω_1, ω_3 та ω_2, ω_3 відповідно. Тому точка Q є радикальним центром кіл ω_1, ω_2 та ω_3, а отже лежить на радикальній осі кіл ω_1 та ω_2.

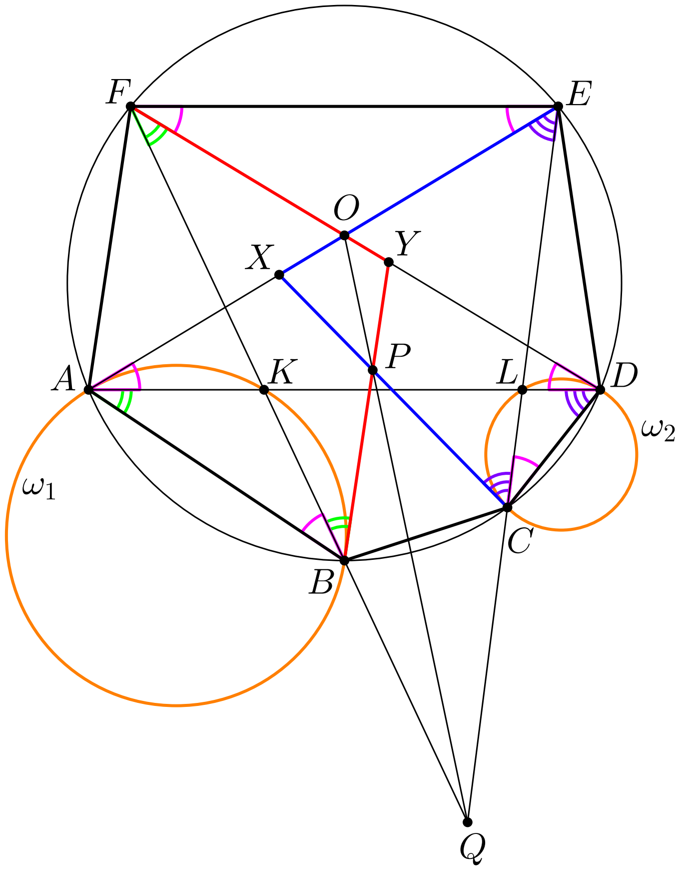

Рис. 6.