8–9 класи

1. Відомо, що в трикутнику ABC відстані від точки перетину бісектрис до кожної з вершин трикутника не перевищують діаметра вписаного в цей трикутник кола. Знайдіть кути трикутника ABC.

2. Дано різносторонній трикутник ABC. Відомо, що I — центр вписаного кола в цей трикутник, точки D, E, F — точки дотику цього кола до сторін AB, BC, CA відповідно. Нехай P — точка перетину прямих DE і AI. Доведіть, що $CP \perp AI$.

3. Нехай $ABCD$ — вписаний чотирикутник, діагоналі якого взаємно перпендикулярні і перетинаються в точці P. Доведіть, що відрізок, який сполучає середини протилежних сторін чотирикутника $ABCD$ ділить відрізок OP навпіл (O — центр кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$).

4. В трикутнику ABC сторона BC дорівнює a. Точка F — середина AB, I — точка перетину бісектрис трикутника ABC. Виявилось, що $\angle AIF = \angle ACB$. Знайдіть периметр трикутника ABC.

5. У трикутнику ABC відомо, що $BC = 5$, $AC - AB = 3$. Доведіть, що $r < 2 < r_a$ (тут r — радіус кола, вписаного у трикутник ABC, r_a — радіус зовнівписаного кола, яке дотикається сторони BC).

6. У гострокутному трикутнику ABC провели бісектрису $\angle A$ до перетину із описаним навколо трикутника ABC колом у точці W. Через точку W проведено пряму паралельно до сторони AB, яка перетинає це ж коло у точці $F \neq W$. Опишіть побудову трикутника ABC, якщо дано відрізки FA і FW, а також $\angle FAC$.

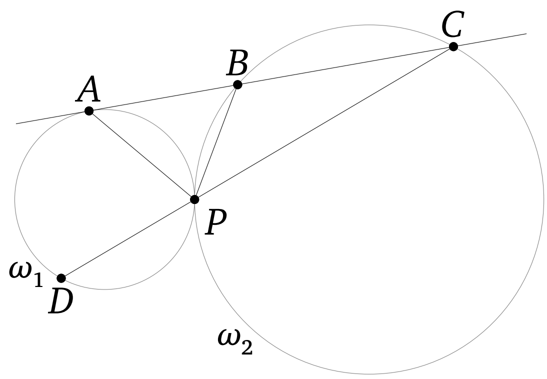
16 лютого 2019 р.

10–11 класи

1. Коло $x^2 + y^2 = 25$ перетинає вісь абсцис в точках A та B. Нехай точка P лежить у першій координатній чверті і належить прямій $x = 11$, C — точка перетину цієї прямої з віссю Ox, а точка Q є точкою перетину відрізка AP із даним колом. Виявилось, що площа трикутника AQB в чотири рази менша площі трикутника APC. Знайдіть координати точки Q.

2. В основі чотирикутної піраміди $SABCD$ лежить прямокутник $ABCD$ зі сторонами $AB = 1$ і $AD = 10$. Ребро SA піраміди перпендикулярне до основи, $SA = 4$. На ребрі AD знайдіть таку точку M, щоб периметр трикутника SMC був мінімальним.

3. Два кола ω_1 і ω_2 дотикаються зовнішнім чином у точці P. Через точку A кола ω_1 проведено дотичну до цього кола, яка перетинає коло ω_2 у точках B та C (див. рисунок). Пряма CP повторно перетинає коло ω_1 в точці D. Доведіть, що промінь PA є бісектрисою кута DPB.



4. В трикутнику ABC сторона BC дорівнює a. Точка F — середина AB, I — точка перетину бісектрис трикутника ABC. Виявилось, що $\angle AIF = \angle ACB$. Знайдіть периметр трикутника ABC.

5. В прямокутному трикутнику ABC з гіпотенузою AB кут A більший за кут B. Точка N на гіпотенузі AB така, що $BN = AC$. Відновіть цей трикутник ABC за точкою N, точкою F на катеті AC та прямою l, що містить бісектрису кута A трикутника ABC.

6. Дано трикутник ABC, точка I_a — центр зовнівписаного кола, що дотикається до сторони BC, точка M — середина сторони BC, точка W — точка перетину бісектриси кута A трикутника ABC з описаним навколо нього колом. Доведіть, що площа трикутника I_aBC обчислюється за формулою $S(I_aBC) = MW \cdot p$, де p — півпериметр трикутника ABC.

16 лютого 2019 р.