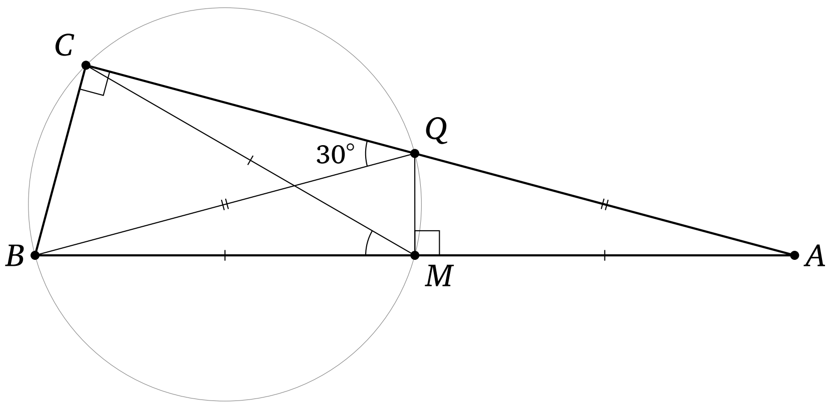
8–9 класи

1. Дано прямокутний трикутник ABC, точка M — середина гіпотенузи AB. Навколо трикутника BCM описано коло, яке перетинає відрізок AC в точці Q, що відмінна від C. Виявилося, що відрізок QA вдвічі більший за катет BC. Знайдіть гострі кути трикутника ABC.

(*Микола Мороз*)

Розв'язання.



Позначимо довжину катета BC за x. Тоді довжина QA становить $2x$. Розглянемо вписаний чотирикутник $BCQM$. Оскільки кут BCQ — прямий, то кут BMQ також прямий. Таким чином MQ — серединний перпендикуляр відрізка BA. Тому $BQ = QA = 2x$.

Бачимо, що в прямокутному трикутнику BCQ катет BC вдвічі менший за гіпотенузу BQ. Звідси можемо зробити висновок, що кут BQC рівний $30°$. Звідси кут BMC також рівний $30°$ як вписаний кут, що спирається на ту ж дугу, що й вписаний кут BQC.

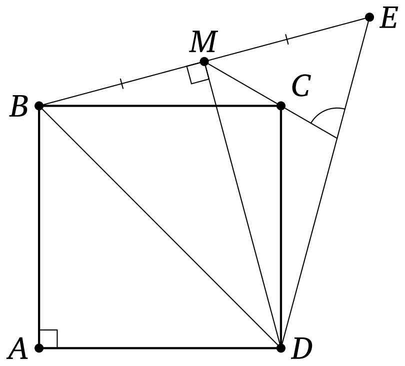
Оскільки в прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, рівна її половині, то трикутник BMC рівнобедрений. В ньому нам відомий кут BMC між рівними сторонами BM та CM. Звідси легко знаходимо, що кут CBM становить $75°$. Звідси інший гострий кут трикутника ABC рівний $15°$.

Відповідь. $\angle A = 15°$, $\angle B = 75°$.

2. На діагоналі BD квадрата $ABCD$ побудовано рівносторонній трикутник BDE, причому точка C розташована всередині трикутника BDE. Нехай M — середина BE. Знайдіть кут між прямими MC і DE.

(*Дмитро Швецов*)

Розв'язання.



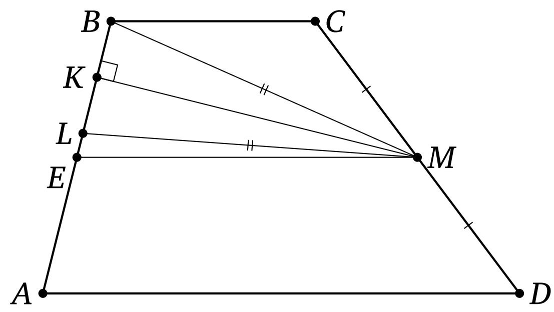
Оскільки DM — медіана рівностороннього трикутника, то вона є і його висотою та бісектрисою. Отже, $\angle BMD = \angle BCD = 90^\circ$, а це означає, що точки B, M, C, D лежать на одному колі. Тоді $\angle CMD = \angle CBD = 45^\circ$, $\angle EMC = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Нехай F — точка перетину MC і ED. З трикутника MEF знаходимо

$$\angle MFE = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ.$$

Відповідь. 75°.

3. Точка M — середина бічної сторони CD трапеції $ABCD$, точка K — основа перпендикуляру, проведеного із точки M на сторону AB. При цьому $3BK \le AK$. Доведіть, що $BC + AD \ge 2BM$.

Розв'язання.

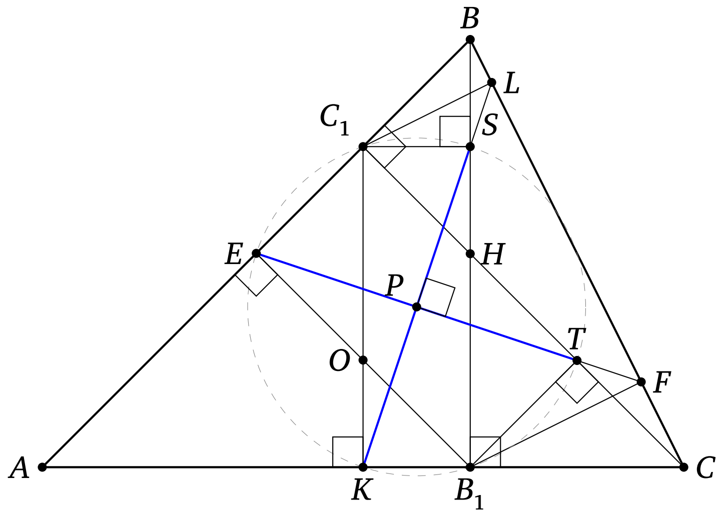


Проведемо середню лінію ME. Необхідно довести, що $ME \ge BM$. Відкладемо на стороні AB відрізок KL, рівний BK. З рівності трикутників BKM та LKM за двома сторонами та прямим кутом між ними (за двома катетами) отримуємо, що $BM = LM$. Точка L співпадає з точкою E або лежить між K та E, оскільки $3BK \le AK$. В першому випадку $BM = LM = ME$. В другому випадку в трикутнику ELM кут ELM — тупий, $ME > LM = BM$.

4. Нехай BB_1 і CC_1 — висоти гострокутного трикутника ABC. Із точки B_1 опущено перпендикуляри B_1E та B_1F відповідно на сторони AB і BC трикутника, а із точки C_1 — перпендикуляри C_1K і C_1L на сторони AC і BC відповідно. Виявилось, що прямі EF і KL перпендикулярні. Знайдіть величину кута A трикутника ABC.

(*Олександр Дзюняк*)

Розв'язання. Точки B, C, B_1, C_1 лежать на одному колі, а тому пряма EF — це пряма Сімсона точки B_1 кола, описаного навколо трикутника BC_1C, а пряма KL — це пряма Сімсона точки C_1 кола, описаного навколо трикутника BB_1C. Тоді, якщо T — це точка перетину EF і CC_1, то $B_1T \perp CC_1$. Аналогічно, якщо S — це точка перетину KL і BB_1, то $C_1S \perp BB_1$.

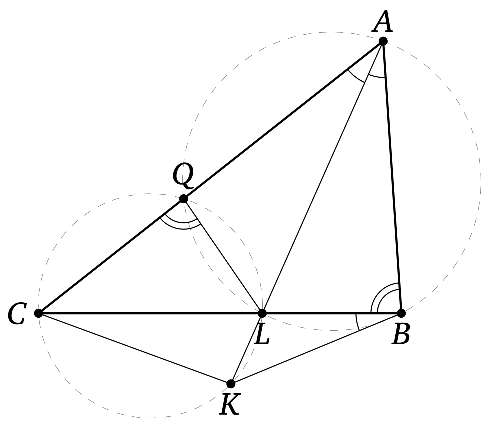


Помітимо, що точки B_1, K, E, C_1, S, T лежать на одному колі. Тоді точка P є центром цього кола, оскільки SK і ET — діаметри. З того, що $\angle EPS = 90^\circ$ випливає, що $\angle EB_1S = 45^\circ$. Тому з трикутника BEB_1: $\angle B_1BE = 45^\circ$, а тоді з трикутника AB_1B: $\angle BAC = 45^\circ$.

5. Нехай AL — бісектриса трикутника ABC. Коло ω_1 є описаним навколо трикутника ABL. Дотична до ω_1 в точці B перетинає продовження AL в точці K. Коло ω_2, описане навколо трикутника CKL, вдруге перетинає ω_1 в точці Q, причому Q лежить на стороні AC. Знайдіть величину кута ABC.

(*Владислав Радомський*)

Розв'язання.



Очевидно, що $\angle AQL = 180^\circ - \angle B$ (чотирикутник $AQLB$ — вписаний в коло ω_1). Тоді $\angle CQL = \angle B$. В такому разі $\angle CKL = 180^\circ - \angle B$ (чотирикутник $CQLK$ — вписаний в коло ω_2). $\angle LAB = \angle LBK$ (вписаний кут і кут між дотичною та хордою). Оскільки $\angle CAL = \angle CBK$, то точки A, B, K, C належать одному колу. Отже, $\angle ABC = \angle AKC$ як вписані, які спираються на одну дугу. Тобто $\angle B = 180^\circ - \angle B$, звідки $\angle B = 90^\circ$.

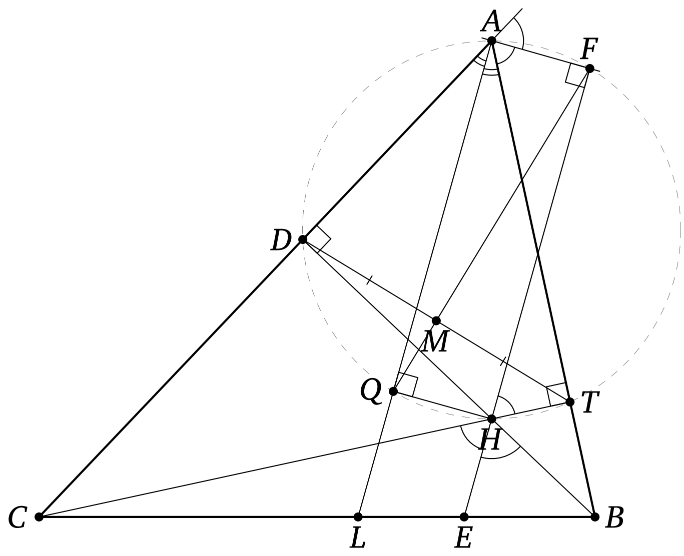
Відповідь. 90°.

6. В трикутнику ABC проведено висоти BD і CT, вони перетинаються в точці H. Точка Q є основою перпендикуляра, опущеного з точки H на бісектрису кута A. Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута A трикутника

ABC, бісектриса кута BHC і пряма QM, де M — середина відрізка DT, перетинаються в одній точці.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання.



Нехай L — точка перетину бісектриси кута A і сторони BC. Нехай бісектриса кута BHC перетинає BC в точці E, а зовнішню бісектрису в точці F. Тоді слід довести, що точки Q, M, F лежать на одній прямій.

Очевидно, що точки A, D, T, H лежать на одному колі ($\angle HTA = \angle HAD = 90^\circ$, тоді сума двох протилежних кутів чотирикутника 180°). З чотирикутника $ADHT$: $\angle DHT = 180^\circ - \angle A$. $\angle TAF = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$, оскільки AF є бісектрисою зовнішнього кута BAC трикутника. $\angle THF = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$, оскільки HF є бісектрисою кута DHT (вертикального до кута BHC).

Тоді $\angle TAF = \angle THF$ і вони опираються на один відрізок TF, тоді чотирикутник $AFTH$ можна вписати в коло. Оскільки описане коло навколо трьох точок задається однозначно, а чотирикутники $AQHT$, $AFTH$, $ADTH$ мають три спільні точки (точки A, H, T), то це означає, що описані кола для цих чотирикутників співпадають, а значить точки A, H, T, Q, D, F лежать на одному колі.

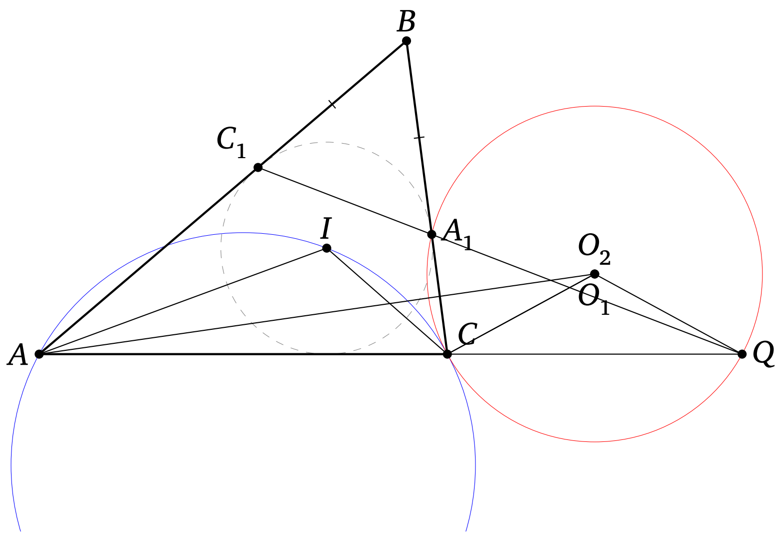
AQ — бісектриса кута DAT. Це означає, що точка Q ділить дугу DHT навпіл. Тоді трикутник DQT рівнобедрений ($QT = QD$, відрізки стягують рівні дуги), тоді бісектриса з вершини Q пройде через середину DT і перетне описане коло в точці, яка ділить дугу DAT навпіл. HF — бісектриса кута DHT. Це означає, що точка F ділить дугу DAT навпіл. Тоді бісектриса кута TQD пройде через середину DT (точку M) і перетне описане коло в точці F, а це означає, що точки Q, M, F лежать на одній прямій, що і треба було довести.

10–11 класи

1. Дано гострокутний трикутник ABC. Вписане в трикутник ABC коло із центром в точці I дотикається сторін AB, BC в точках C_1 та A_1 відповідно. Прямі A_1C_1 та AC перетинаються в точці Q. Доведіть, що кола, описані навколо трикутників AIC і A_1CQ, дотикаються.

(*Дмитро Швецов*)

Розв'язання.



Позначимо центри кіл, які описані навколо трикутників AIC і A_1CQ, через O_1 і O_2 відповідно. Доведемо, що точки O_1, C, O_2 колінеарні. Оскільки C — спільна точка обох кіл, то цього буде достатньо для доведення потрібного твердження.

Нехай $\angle B = \beta$. $\angle AIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta$. Тоді центральний кут AO_1C (менший) дорівнює $180^\circ - \beta$, а з рівнобедреного трикутника AO_1C знаходимо $\angle ACO_1 = \frac{1}{2}\beta$.

Трикутник C_1BA_1 рівнобедрений, оскільки $BC_1 = BA_1$ як дотичні, проведені з точки до кола. Тоді $\angle CA_1Q = \angle C_1A_1B = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$. Це означає, що $\angle CO_2Q = 180^\circ - \beta$, а значить з рівнобедреного трикутника CO_2Q: $\angle O_2CQ = \frac{1}{2}\beta$.

Зазначимо, що точки O_1 та O_2 розташовані по різні боки від прямої AQ, точка C розміщена між точками A і Q, $\angle ACO_1 = \angle QCO_2$, тобто точки O_1, C, O_2 розташовані на одній прямій, що і потрібно було довести.

2. На середній лінії MN трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) обрано точки F і G так, що $\angle ABF = \angle CBG$. Доведіть, що тоді $\angle BAF = \angle DAG$.

(*Дмитро Прокопенко*)

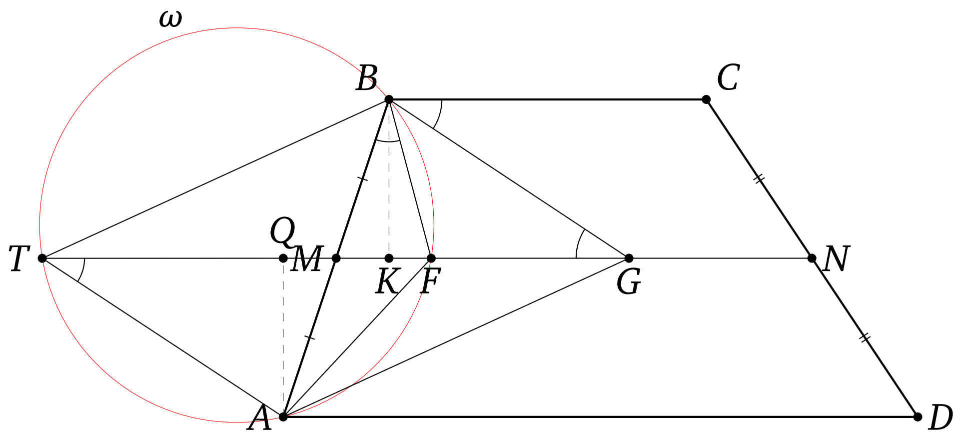
Розв'язання.

Перший спосіб. Опишемо коло ω навколо трикутника AFB. Нехай T — друга точка перетину прямої MN з колом ω. Тоді кут $\angle FTA = \angle FBA$ (вписані, які опираються на одну дугу). Аналогічно $\angle BTF = \angle BAF$.

Кут $\angle BGT = \angle GBC$ як внутрішні різносторонні кути. Оскільки $\angle BGT = \angle GTA$, то $BG \parallel TA$.

Разом з тим $BG = TA$, оскільки трикутники BKG і AQT рівні (за катетом і гострим кутом).

Таким чином, $ATBG$ — паралелограм і $\angle BTG = \angle TGA$ (як внутрішні різносторонні). Але і $\angle TGA = \angle GAD$ (як внутрішні різносторонні). Отже, $\angle BAF = \angle GAD$, що і потрібно було довести.



Другий спосіб. Використаємо таке відоме допоміжне твердження:

Лема. Нехай M і N — точки, які лежать всередині заданого кута $\angle BAC$. Промені AM і AN будуть ізогональними (тобто симетричними відносно бісектриси кута $\angle BAC$) тоді і тільки тоді, коли виконується співвідношення

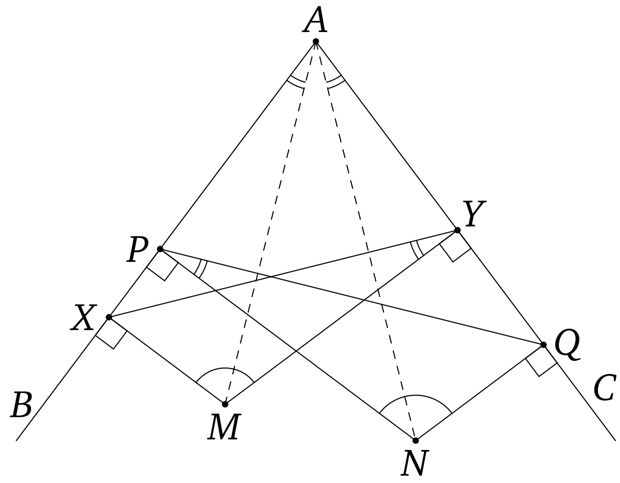
$$\frac{d(M;AB)}{d(M;AC)} = \frac{d(N;AC)}{d(N;AB)}.$$

Іншими словами,

$$\angle MAB = \angle NAC \Leftrightarrow \frac{d(M;AB)}{d(M;AC)} = \frac{d(N;AC)}{d(N;AB)}$$

(тут $d(X;l)$ позначає відстань від точки X до прямої l).

Доведення леми. Нехай X та Y, P та Q — проекції точок M та N на прямі AB і AC відповідно. Тоді $\angle XMY = 180^\circ - \angle BAC = \angle QNP$.



Далі одержуємо,

$$\angle XMY = \angle QNP \text{ і } \frac{MX}{MY} = \frac{NQ}{NP};$$
$$\Updownarrow$$
$$\triangle\, XMY \sim \triangle\, QNP;$$
$$\Updownarrow$$
$$\angle MYX = \angle NPQ;$$
$$\Updownarrow$$
$$\angle MAB = \angle NAC,$$

бо чотирикутники $AXMY$ і $AQNP$ — циклічні, що і завершує доведення леми.

Перейдемо безпосередньо до розв'язання задачі. Застосувавши лему для кута $\angle ABC$ і променів BF і BG (які за умовою задачі є ізогональними), знаходимо:

$$\frac{d(F, AB)}{d(F, BC)} = \frac{d(G, BC)}{d(G, AB)}.$$

Враховуючи, що точки F і G рівновіддалені від основ трапеції, останню рівність можна переписати у вигляді

$$\frac{d(F, AB)}{d(F, AD)} = \frac{d(G, AD)}{d(G, AB)},$$

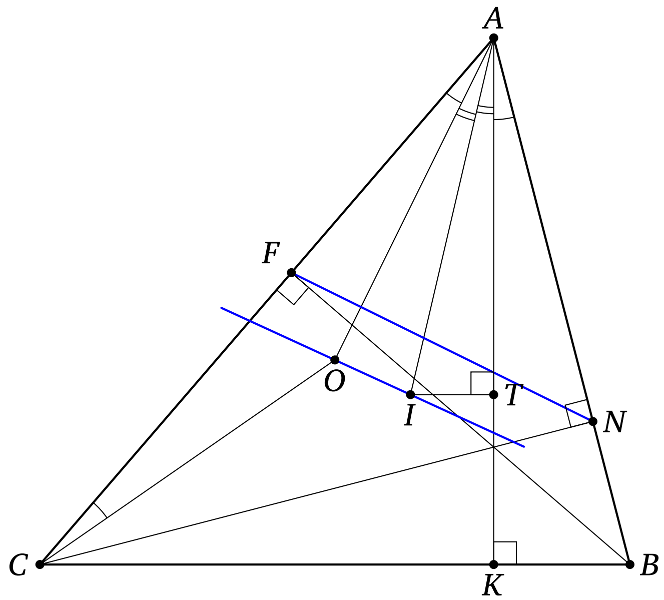
а це і означає (за лемою), що промені AF і AG є ізогональними всередині кута $\angle BAD$, тобто $\angle BAF = \angle DAG$, що і потрібно було довести.

3. Відрізки BF і CN — висоти в гострокутному трикутнику ABC. Пряма OI, яка з'єднує центри описаного та вписаного кіл трикутника ABC паралельна до прямої FN. Знайдіть довжину висоти AK в трикутнику ABC, якщо радіуси його описаного та вписаного кіл дорівнюють R та r відповідно.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання.

Оскільки точки B, N, F, C належать одному колу з діаметром BC, то $\angle AFN = \angle B$. Очевидно, що $\angle AOC = 2\angle B$ (центральний). Тоді $\angle CAO = \angle ACO = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle B) = 90^\circ - \angle B$. Отже, $AO \perp FN$. За умовою $OI \parallel FN$, звідси $\angle AOI = 90^\circ$.



З'єднаємо A та I. З трикутника AKB: $\angle KAB = 90^\circ - \angle B = \angle CAO$, тобто $\angle OAI = \angle IAK$ (AI — бісектриса).

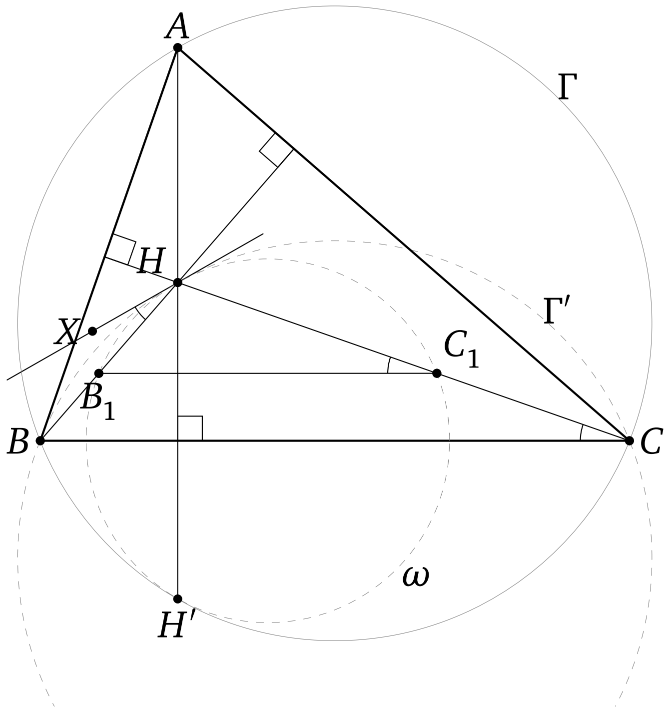
Через I проведемо пряму паралельно до BC. Нехай вона перетне висоту AK в точці T. Очевидно, $TK = r$.

Оскільки трикутники AIO та AIT рівні за гіпотенузою і гострим кутом, то $AT = AO = R$. Таким чином, $AK = AT + TK = R + r$.

Відповідь. $R + r$.

4. Висоти гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. На відрізках BH та CH позначили точки B_1 та C_1 відповідно так, що $B_1C_1 \parallel BC$. Виявилося, що центр кола ω, описаного навколо трикутника B_1HC_1, лежить на прямій BC. Доведіть, що коло Γ, яке описане навколо трикутника ABC, дотикається кола ω.

Розв'язання. Позначимо через Γ' коло, описане навколо трикутника BHC. На дотичній до кола Γ' в точці H позначимо точку X, яка розташовується всередині кута BCH. Тоді $\angle BHX = \angle BCH = \angle B_1C_1H$ (остання рівність слідує з того, що $BC \parallel B_1C_1$). Отже, коло ω дотикається до прямої HX та кола Γ' в точці H.



Позначимо через H' точку симетричну H відносно прямої BC (як відомо, ця точка лежить на колі Γ).

Отже, при симетрії відносно BC коло Γ' переходить в коло Γ, а коло ω — саме в себе, оскільки центр кола ω належить прямій BC. Оскільки ω дотикається Γ', то воно дотикається і до Γ, що необхідно було довести.

5. Про трикутник ABC відомо, що $3 \cdot BC = CA + AB$. Нехай A-симедіана трикутника ABC перетинає описане коло трикутника ABC в точці D. Доведіть, що

$$\frac{1}{BD} + \frac{1}{CD} = \frac{6}{AD}.$$

Примітка. Якщо AM — медіана трикутника, то промінь, який симетричний променю AM відносно бісектриси кута A трикутника, називається A-симедіаною трикутника ABC.

(*Ercole Suppa, Italy*)

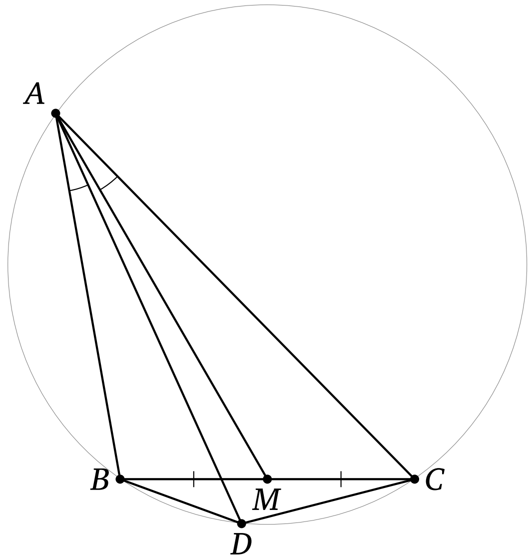
Розв'язання.

За теоремою Птоломея для вписаного чотирикутника $ABDC$ знаходимо:

$$BC \cdot AD = AB \cdot CD + AC \cdot BD,$$

звідки

$$AD = \frac{AB \cdot CD + AC \cdot BD}{BC}.$$



Із теореми синусів для трикутників ABD, ADC, ABM, AMC легко встановити, що $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$. Справді, з трикутників ABM і AMC знаходимо, що $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin\angle MAC}{\sin\angle MAB}$, а з трикутників ABD і ACD: $\frac{BD}{CD} = \frac{\sin\angle DAB}{\sin\angle DAC}$.

Тоді:

$$\begin{aligned}\frac{AD}{BD} + \frac{AD}{CD} &= \frac{AB \cdot CD + AC \cdot BD}{BC \cdot BD} + \frac{AB \cdot CD + AC \cdot BD}{BC \cdot CD} = \\ &= \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{BD} + \frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC} + \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{CD} = \\ &= \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AC}{AB} + \frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC} + \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} = \\ &= \frac{AC}{BC} + \frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC} + \frac{AB}{BC} = \frac{2(AC + AB)}{BC} = 6,\end{aligned}$$

що рівносильно рівності, яку і потрібно було довести.

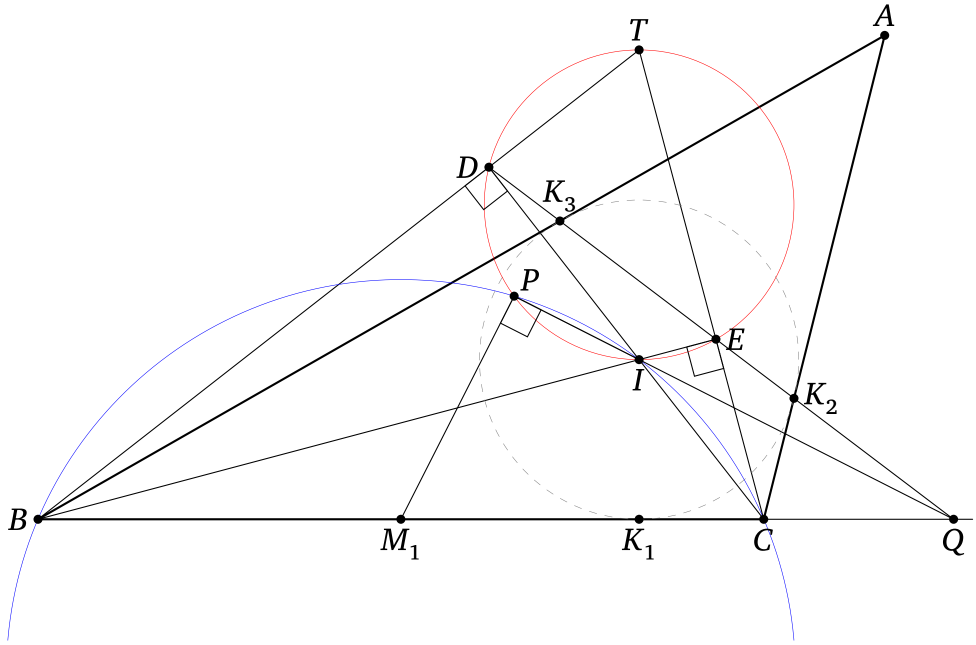
6. В нерівнобедреному трикутнику ABC I — центр вписаного кола, M_1 — середина сторони BC, K_2, K_3 — точки дотику вписаного кола трикутника з відрізками AC і AB відповідно. Точка P лежить на описаному колі трикутника BCI, а кут M_1PI — прямий. Доведіть, що прямі BC, PI, K_2K_3 перетинаються в одній точці.

(*Михайло Плотніков*)

Розв'язання.

Нехай Q — точка перетину BC і K_2K_3. Тоді за теоремою Менелая для прямої K_2K_3 і трикутника ABC

$$\frac{BK_3}{K_3A} \cdot \frac{AK_2}{K_2C} \cdot \frac{CQ}{QB} = 1.$$



Нескладно також показати, що

$$\frac{BK_3}{K_3A} \cdot \frac{AK_2}{K_2C} \cdot \frac{CK_1}{K_1B} = 1,$$

де K_1 — точка дотику вписаного кола трикутника ABC з відрізком BC. Тому

$$\frac{CQ}{QB} = \frac{CK_1}{K_1B}.$$

Нехай T — ортоцентр трикутника BCI, а D, E — основи перпендикулярів з точок B і C на прямі IC та IB відповідно.

Розглянемо такі кола: коло, що проходить через точки B, I, C, коло, що побудоване на BC, як на діаметрі і коло, що побудоване на IT, як на діаметрі. Друге із вказаних кіл містить точки D і E, а третє — D, E і P. Радикальні осі BC, DE, PI цих трьох кіл перетинаються в одній точці (назвемо її Q'). Згідно теоремам Чеви і Менелая для трикутника BIC, прямої DE і точки T:

$$\frac{CD}{DI} \cdot \frac{IE}{EB} \cdot \frac{BK_1}{K_1C} = 1,$$
$$\frac{CD}{DI} \cdot \frac{IE}{EB} \cdot \frac{BQ'}{Q'C} = 1.$$

Тому $\frac{CQ'}{Q'B} = \frac{CK_1}{K_1B}$, тобто точки Q і Q' співпадають, що і треба було довести.