8–9 класи

1. Нехай BM — медіана трикутника ABC. На продовженні MB за точку B обрано точку K так, що $BK = \frac{1}{2}AC$. Доведіть, що якщо кут AMB дорівнює 60°, то $AK = BC$.

2. На стороні AD квадрата $ABCD$ обрано точку X. У трикутник ABX вписано коло, яке дотикається до AX, BX і AB в точках N, K і F відповідно. Доведіть, що промінь NK проходить через центр O квадрата $ABCD$.

3. Відновіть трикутник ABC, в якому $\angle B - \angle C = 90^\circ$, за ортоцентром H та точками M_1 і L_1 — відповідно основами медіани та бісектриси, проведених з вершини A.

4. Нехай X — довільна точка на стороні BC трикутника ABC. Трикутник T утворено бісектрисами кутів ABC, ACB та AXC. Доведіть, що описане коло трикутника T, проходить через вершину A.

5. У гострокутному трикутнику ABC точка I — інцентр, H — ортоцентр, O — центр описаного кола, K і T — точки дотику відповідно вписаного та зовнівписаного кіл зі стороною BC. Виявилося, що відрізок TI проходить через точку O. Доведіть, що HK є бісектрисою кута BHC.

6. Нехай s — довільна пряма, яка проходить через інцентр трикутника ABC — точку I. Пряма s перетинає прямі AB та BC у точках D та E відповідно. Точки P та Q — центри описаних кіл DAI та CEI відповідно, а точка F — друга точка перетину цих кіл. Доведіть, що описане коло трикутника PQF завжди проходить через сталу точку на площині незалежно від положення прямої s.

6 листопада 2022 року

10–11 класи

1. Від трикутника ABC залишилися лише інцентр I, точка K дотику вписаного кола зі стороною AB, а також центр I_a зовнівписаного кола, яке дотикається до сторони BC. Побудуйте трикутник, рівновеликий до трикутника ABC.

2. У гострокутному трикутнику ABC сума відстаней від вершин B і C до ортоцентра H дорівнює $4r$, де r — радіус кола, вписаного у цей трикутник. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо відомо, що $BC = a$.

3. Дано трикутник ABC, в якому медіани BE і CF перпендикулярні. Нехай M — точка перетину медіан цього трикутника, а L — його точка Лемуана (точка перетину прямих, симетричних до медіан відносно бісектрис відповідних кутів). Доведіть, що $ML \perp BC$.

4. У трикутнику ABC виконується співвідношення $AB + AC = 2BC$. Нехай I та M — інцентр та точка перетину медіан трикутника ABC, AL — його бісектриса, а точка P — ортоцентр трикутника BIC. Доведіть, що точки L, M, P лежать на одній прямій.

5. Нехай X — довільна точка на стороні BC трикутника ABC. Трикутник T утворено бісектрисами кутів ABC, ACB та AXC. Доведіть, що:
а) описане коло трикутника T, проходить через вершину A;
б) ортоцентр трикутника T належить прямій BC.

6. Нехай ω — описане коло трикутника ABC, в якому $AC < AB$, K — середина дуги BAC, KW — діаметр кола ω. Коло γ вписане у криволінійний трикутник, утворений відрізками BC, AB та дугою AC кола ω. Виявилося, що коло γ також дотикається до KW у точці F. Нехай I — інцентр трикутника ABC, M — середина меншої дуги AK, а T — друга точка перетину MI з колом ω. Доведіть, що прямі FI, TW та BC перетинаються в одній точці.

6 листопада 2022 року