VII Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач
8 клас (складний варіант)

1. У трикутнику ABC точка O є центром описаного кола, пряма AO перетинає BC у точці T, а перпендикуляри, проведені з точки T до AB та AC, перетинають прямі OB та OC у точках E та F відповідно. Доведіть, що $BE = CF$.

(*Олексій Карлюченко*)

Розв'язання.

Нехай AD — діаметр описаного кола трикутника ABC (рис. 1). Тоді $BD \perp AB$ та $TE \perp AB$, звідки $TE \parallel BD$.

Трикутник OBD рівнобедрений ($OB = OD$ як радіуси). Якщо $\angle OBD = \angle ODB = \alpha$, то і $\angle OET = \angle OTE = \alpha$, тому $OE = OT$ та

$$BE = OB - OE = OD - OT = DT.$$

Аналогічно $CF = DT$, отже $BE = CF$. □

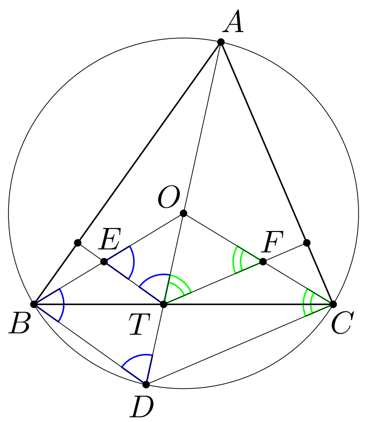


Рис. 1.

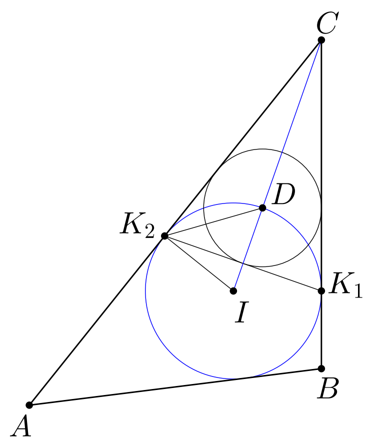


Рис. 2.

2. Дано трикутник ABC, у якому відмічено центр вписаного кола I та K_1 і K_2 — точки дотику вписаного кола зі сторонами BC і AC відповідно. Користуючись циркулем та лінійкою, побудуйте центр кола, вписаного у трикутник CK_1K_2, за допомогою найменшої можливої кількості ліній (лінія — пряма або коло).

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання.

Очевидно, що однієї лінії не вистачить. Проведемо дві лінії: вписане коло трикутника ABC (з центром I та радіусом IK_1) та відрізок CI. Нехай вони перетнулися в точці D (рис. 2). Покажемо, що D — центр кола, вписаного у трикутник CK_1K_2. Справді, D лежить на бісектрисі кута C, тому достатньо довести, що K_2D — бісектриса кута CK_2K_1. Нехай $\angle ACB = 2\alpha$. Оскільки CI — бісектриса, трикутник CIK_2 прямокутний, а трикутники K_2ID та CK_1K_2 рівнобедрені, послідовно знаходимо

$$\angle CIK_2 = 90^\circ - \alpha,\ \ \angle IK_2D = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\angle CIK_2 = 45^\circ + \tfrac{\alpha}{2},$$

$$\angle CK_2D = 90^\circ - \angle IK_2D = 45^\circ - \tfrac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{2}\angle CK_2K_1,$$

що завершує доведення. □

3. Нехай ABC — прямокутний трикутник ($\angle C = 90^\circ$), N — середина дуги BAC описаного кола та K — точка перетину CN з AB. На продовженні AK за точку K відклали відрізок $TK = KA$. Доведіть, що коло з центром T та радіусом TK дотикається до BC.

(*Михайло Сидоренко*)

Розв'язання.

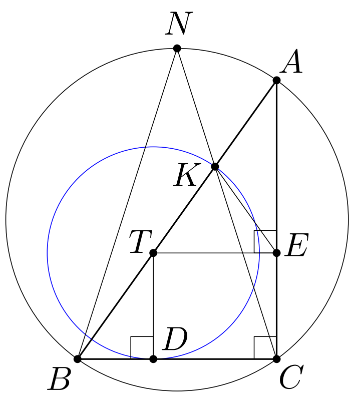


Рис. 3.

Проведемо $TD \perp BC$ та $TE \perp AC$ (рис. 3). Достатньо довести, що $TD = TK$. Оскільки KE — медіана прямокутного трикутника AET, проведена до гіпотенузи, то $KE = TK = KA$, а оскільки $TDCE$ прямокутник, то $TD = CE$.

Залишається довести, що $KE = CE$. Нехай $\angle BAC = 2\alpha$. Тоді також $\angle BNC = 2\alpha$, звідки $\angle BCN = \angle CBN = 90^\circ - \alpha$, $\angle KCE = 90^\circ - \angle BCN = \alpha$, $\angle KEA = 2\alpha$ та $\angle CKE = \angle KEA - \angle KCE = \alpha = \angle KCE$. Тому трикутник KEC рівнобедрений, що завершує доведення.

□

4. Нехай ABC — гострокутний трикутник, AD, BE та CF — його висоти та H — точка перетину висот. На променях AD, BE та CF відклали відрізки $AA_1 = HD$, $BB_1 = HE$ та $CC_1 = HF$ відповідно. Нехай A_2, B_2 та C_2 — середини A_1D, B_1E та C_1F. Доведіть, що точки H, A_2, B_2 та C_2 лежать на одному колі.

(*Михайло Баркулов*)

Розв'язання. Нехай O — центр описаного кола трикутника ABC. Відкладемо на продовженнях висот відрізки $DH_1 = DH$, $EH_2 = EH$ та $FH_1 = FH$ (рис. 4). Тоді A_2 це спільна середина відрізків A_1D та AH_1. Прямокутні трикутники BDH та BDH_1 рівні за двома катетами. Звідси

$$\angle BH_1A = \angle BHD = 90^\circ - \angle HBC = \angle BCA,$$

тому точка H_1 лежить на описаному колі трикутника ABC. Отже, серединний перпендикуляр до AH_1 проходить через точку O, або $\angle HA_2O = 90^\circ$. Аналогічно $\angle HB_2O = 90^\circ$ та $\angle HC_2O = 90^\circ$. Тому точки H, A_2, B_2, C_2 та O лежать на колі з діаметром HO.

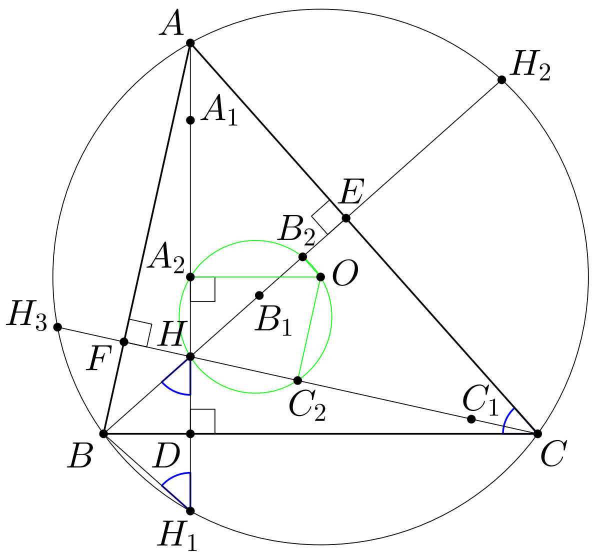
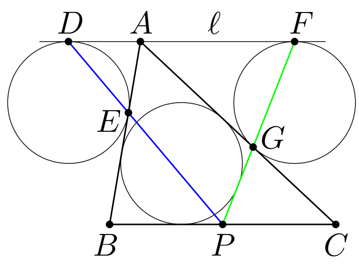


Рис. 4.

□

5. Через вершину A трикутника ABC провели пряму $\ell \parallel BC$. Два кола, рівні вписаному колу трикутника ABC, дотикаються до прямих ℓ, AB та AC як показано на рисунку. Прямі DE та FG перетинаються у точці P, яка належить BC. Доведіть, що P — середина BC.

(*Михайло Плотніков*)



Розв'язання. Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC, K, L — точки дотику цього кола зі сторонами AB та AC, O_1, O_2 — центри двох інших кіл з умови задачі (рис. 5). Оскільки $AD = AE$ як дотичні, проведені до кола з однієї точки, то $\angle ADE = \angle AED$. Але $\angle ADE = \angle BPE$ (різносторонні при паралельних прямих) та $\angle AED = \angle BEP$ (вертикальні). Отже, $\angle BEP = \angle BPE$, трикутник BPE рівнобедрений та $BP = BE$. Аналогічно $CP = CG$, тому достатньо встановити рівність $BE = CG$.

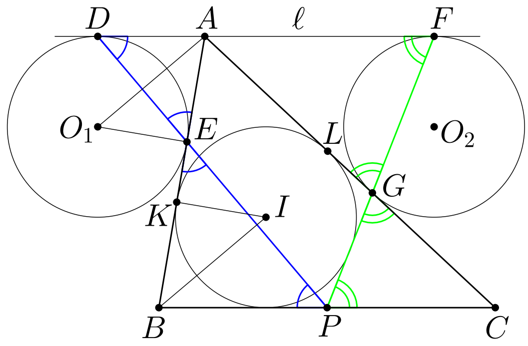


Рис. 5.

Прямокутні трикутники O_1AE та IBK рівні за катетом та гострим кутом ($O_1E = IK$ як радіуси рівних кіл, $\angle O_1AE = \frac{1}{2}\angle DAE = \frac{1}{2}\angle PBE = \angle IBK$). Тому $AE = BK$, а отже $BE = AB - AE = AB - BK = AK$. Аналогічно $CG = AL$ та залишається зауважити, що $AK = AL$ як дотичні, проведені до кола з однієї точки. □

6. Дано рівнобедрений трикутник ABC, в якому $\angle BAC = 108°$. Бісектриса кута ABC перетинає описане коло трикутника у точці D. На відрізку BC відмітили точку E таку, що $AB = BE$. Доведіть, що серединний перпендикуляр до CD дотикається до описаного кола трикутника ABE.

(*Богдан Желябовський*)

Розв'язання.

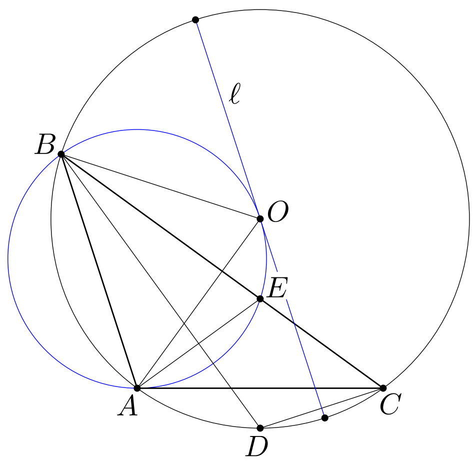


Рис. 6.

Кути при основі рівнобедреного трикутника ABC дорівнюють $\angle ABC = \angle BCA = 36°$. Нехай O — центр описаного кола трикутника ABC та ℓ — серединний перпендикуляр до CD (рис. 6). З рівнобедреного трикутника ABE знаходимо $\angle AEB = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC = 72°$. Також $\angle AOB = 2\angle ACB = 72°$, бо центральний кут вдвічі більший за вписаний. Тому описане коло трикутника ABE проходить через точку O. Пряма ℓ теж проходить через точку O. Покажемо, що ℓ дотикається до описаного кола трикутника ABE саме у цій точці.

Оскільки $\angle ACD = \angle ABD = \frac{1}{2}\angle ABC = 18°$ та $\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = 54°$, то $\angle ABC + \angle BCD = 90°$. Звідси $AB \perp CD$, а тому $\ell \parallel AB$. Але трикутник AOB рівнобедрений, тому дотична до його описаного кола у точці O паралельна до AB, тобто цією дотичною є пряма ℓ.

□

VII Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач
9 клас (складний варіант)

1. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти BD та CE, які перетинаються у точці H. На стороні AC обрали точку F так, що $FH \perp CE$. Відрізок FE перетинає описане коло трикутника CDE у точці K. Доведіть, що $HK \perp EF$.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання.

Точки D, E лежать на колі з діаметром BC. За умовою точка K теж належить цьому колу, тому $\angle KDB = 180^\circ - \angle KEB = \angle KEA$ (рис. 1).

Оскільки $FH \perp CE$ та $AB \perp CE$, то $FH \parallel AB$. Звідси $\angle HFE = \angle KEA$. Отже, $\angle HFE = \angle KDB$ та чотирикутник $DFKH$ є вписаним. Тому $\angle FKH = 180^\circ - \angle HDF = 90^\circ$, тобто $HK \perp EF$.

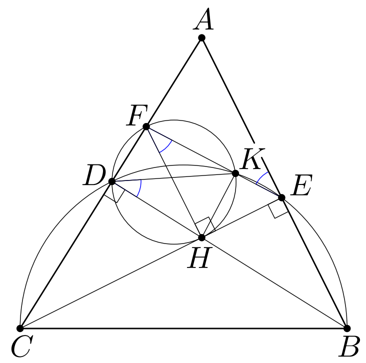


Рис. 1.

□

2. Нехай BC та BD — дотичні, проведені з точки B до кола з діаметром AC, та E — друга точка перетину прямої CD з описаним колом трикутника ABC. Доведіть, що $CD = 2DE$.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання.

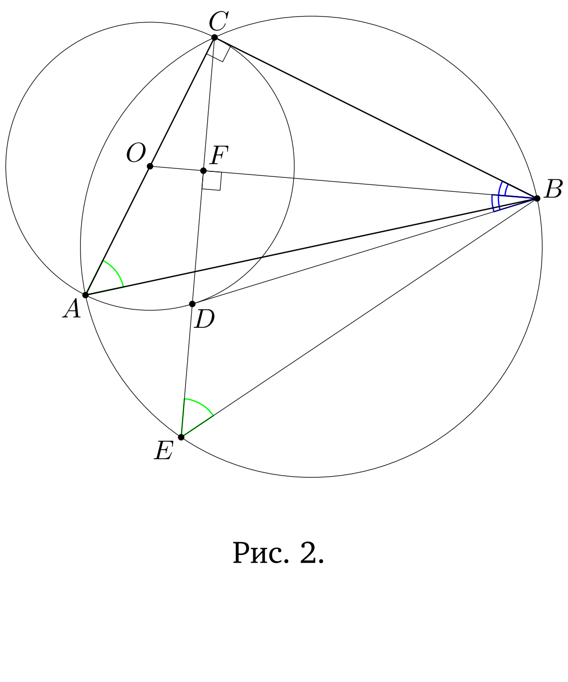


Рис. 2.

Нехай O — середина AC та F — точка перетину BO з CD (рис. 2). Прямокутні трикутники OBC та OBD рівні за трьома сторонами ($OC = OD$ як радіуси, $BC = BD$ як дотичні), тому BF — бісектриса, висота і медіана у рівнобедреному трикутнику CBD. Прямокутні трикутники ACB та EFB подібні, бо $\angle FEB = \angle CEB = \angle CAB$. Оскільки BO — медіана трикутника ACB та $\angle OBC = \angle DBF$, то BD — медіана трикутника EFB. Тому $CF = FD = DE$, а отже $CD = 2DE$.

□

3. Дано трикутник ABC, у якому відмічено центр вписаного кола I та K_1 і K_2 — точки дотику вписаного кола зі сторонами BC і AC відповідно. Користуючись циркулем та лінійкою, побудуйте центр зовнівписаного кола трикутника CK_1K_2, яке дотикається до CK_2, за допомогою щонайбільше 4 ліній (лінія — пряма або коло).

(*Григорій Філіпповський та Володимир Брайман*)

Розв'язання.

Спочатку проведемо дві лінії: вписане коло трикутника ABC (з центром I та радіусом IK_1) та пряму CI. Нехай вони перетнулися в точках D та E, $CD < CE$ (рис. 3).

Покажемо, що D — центр кола, вписаного у трикутник CK_1K_2. Справді, позначимо центр вписаного кола D'. Точка D' лежить на CI, а оскільки I це середина дуги K_1K_2 описаного кола трикутника CK_1K_2, то за теоремою про "тризуб" маємо $ID' = IK_2 = IK_3$. Звідси точки D та D' збігаються.

Оскільки $\angle DK_2E = 90^\circ$, то K_2E — бісектриса зовнішнього кута при вершині K_2 трикутника CK_1K_2. Тепер проводимо ще дві лінії: прямі EK_2 та K_1D. Вони перетнуться у шуканому центрі зовнівписаного кола.

Зауваження. Точка E є центром зовнівписаного кола трикутника CK_1K_2, яке дотикається до K_1K_2.

□

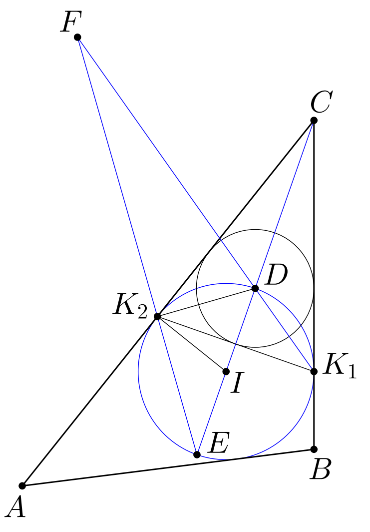


Рис. 3.

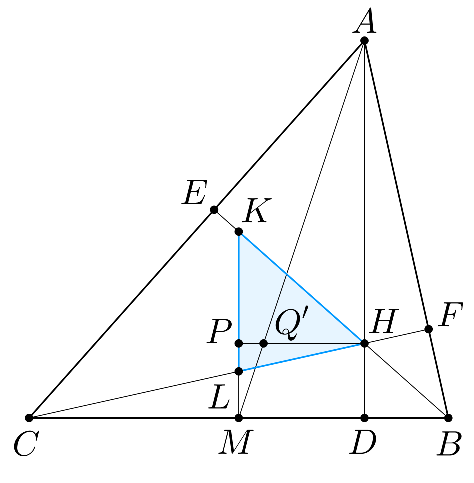


Рис. 4.

4. Нехай BE та CF — висоти гострокутного трикутника ABC, H — ортоцентр цього трикутника, M — середина BC, K та L — точки перетину серединного перпендикуляра до BC з BE та CF відповідно, Q — ортоцентр трикутника KLH. Доведіть, що Q лежить на медіані AM.

(*Богдан Желябовський*)

Розв'язання.

Трикутники ABC та HLK подібні, бо відповідні сторони цих трикутників перпендикулярні, а отже відповідні кути цих трикутників рівні. Нехай AD та HP — висоти цих трикутників, проведені до BC та KL відповідно, а Q' — точка перетину AM з HP (рис. 4). Аби довести, що Q та Q' збігаються, достатньо показати, що $HQ' : Q'P = AH : HD$. Оскільки прямокутні трикутники $AQ'H$ та $MQ'P$ подібні, то $HQ' : Q'P = AH : MP$. Залишається помітити, що $MP = HD$, бо $MPHD$ це прямокутник. □

5. Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC, K — точка дотику цього кола зі стороною BC. На відрізках BI та CI відмітили точки X та Y так, що $KX \perp AB$ та $KY \perp AC$. Описане коло трикутника XYK вдруге перетинає пряму BC у точці D. Доведіть, що $AD \perp BC$.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання. Нехай KX та KY перетинають AB та AC у точках E та F відповідно, а AH — висота трикутника ABC (рис. 5). Покажемо, що точки X, Y, K, H лежать на одному колі. Це означатиме, що точки D та H збігаються. Прямокутні трикутники BEX та BKI подібні, тому

$$\frac{BX}{BI} = \frac{BE}{BK} = \cos\angle B = \frac{BH}{BA}.$$

Отже, $BX : BH = BI : BA$, звідки трикутники BHX та BAI подібні за двома сторонами і кутом між ними. Тому $\angle BHX = \angle BAI = \frac{A}{2}$. Аналогічно $\angle CHY = \frac{\angle A}{2}$, тому $\angle XHY = 180^\circ - \angle BHX - \angle CHY = 180^\circ - \angle A$.

З чотирикутника $AEKF$ знаходимо $\angle XKY = \angle EKF = 180^\circ - \angle A = \angle XHY$, тому точки X, Y, K, H лежать на одному колі, що завершує доведення.

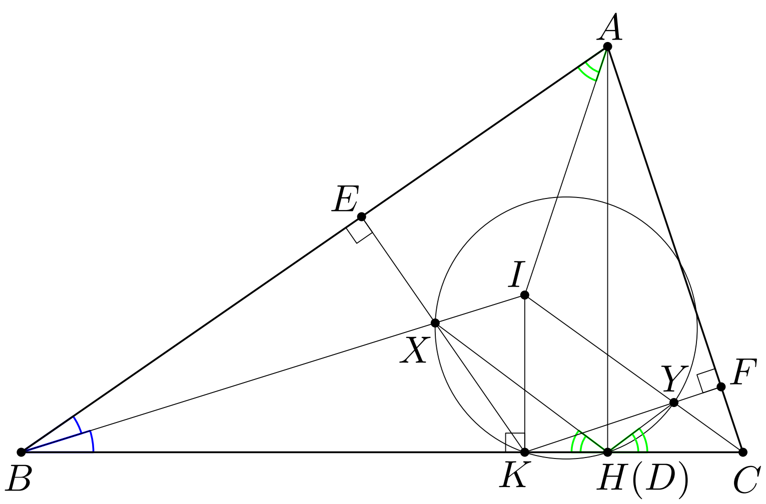


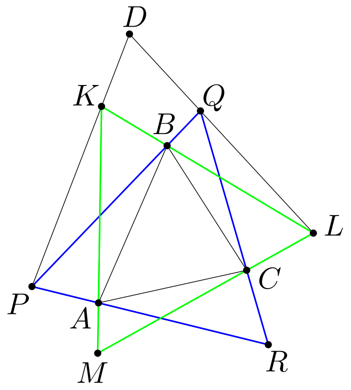
Рис. 5.

□

6. Навколо гострокутного трикутника ABC описали рівносторонні трикутники KLM та PQR як показано на рисунку. Прямі PK та QL перетинаються у точці D. Доведіть, що

$$\angle ABC + \angle PDQ = 120^\circ.$$

(*Юрій Білецький*)



Розв'язання. Оскільки $\angle APB = \angle AKB = 60^\circ$, то чотирикутник $APKB$ вписаний, аналогічно чотирикутник $BQLC$ вписаний. Нехай кола, описані навколо цих чотирикутників, перетинаються в точках B та O (рис. 6).

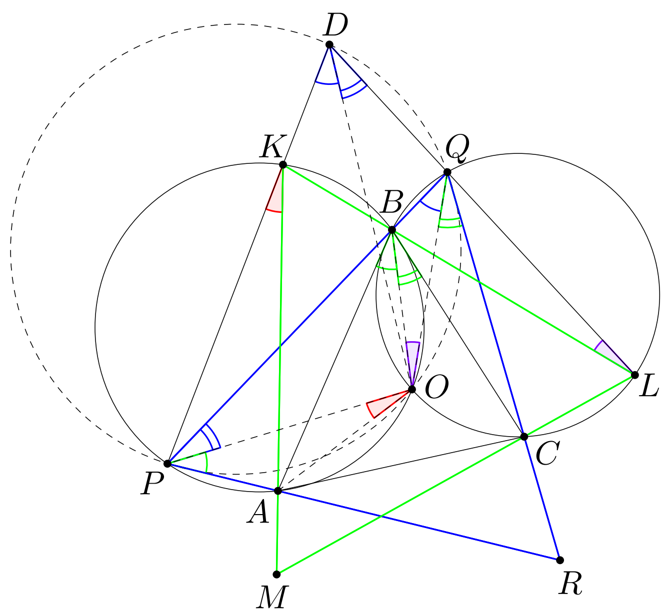


Рис. 6.

Тоді $\angle AOB = 120^\circ$. Покажемо, що чотирикутник $PDQO$ вписаний. Справді, нехай $\angle POA = \angle PKA = \alpha$ та $\angle BOQ = \angle BLQ = \beta$. Тоді

$$\angle POQ = \angle AOB - \angle POA + \angle BOQ = 120^\circ - \alpha + \beta,$$
$$\angle PDQ = \angle PKL - \angle KLQ = 60^\circ + \alpha - \beta,$$

звідки $\angle POQ + \angle PDQ = 180^\circ$. Тепер

$$\begin{aligned}\angle ABC + \angle PDQ =& \angle ABO + \angle OBC + \angle PDO + \angle ODQ = \\ =& \angle APO + \angle OQC + \angle PQO + \angle OPQ = \angle APQ + \angle PQC = \\ =& 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ.\end{aligned}$$

□

VII Олімпіада геометричної творчості
імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач
10-11 клас (складний варіант)

1. Кола ω_1 та ω_2 дотикаються до прямої ℓ у точках A та B відповідно, а також дотикаються одне одного зовнішнім чином у точці D. На меншій дузі BD кола ω_2 вибрано довільну точку E. Пряма DE вдруге перетинає коло ω_1 у точці C. Доведіть, що $BE \perp AC$.

(*Юрій Білецький*)

Розв'язання. I спосіб. Нехай O_1 та O_2 — центри кіл ω_1 та ω_2, F — точка перетину прямих AC та BE (рис. 1). Покажемо, що точки A, B, D та F лежать на одному колі. Справді, у рівнобедрених трикутниках O_1CD та O_2DE маємо $\angle O_1DC = \angle O_2DE$ як вертикальні, тому $\angle CO_1D = \angle DO_2E$. Звідси

$$\angle CAD = \tfrac{1}{2}\angle CO_1D = \tfrac{1}{2}\angle DO_2E = \angle DBE,$$

тобто $\angle FAD = \angle FBD$ та чотирикутник $ABDF$ вписаний.

Оскільки $AO_1 \parallel BO_2$, то $\angle AO_1D + \angle BO_2D = 180^\circ$. З рівнобедрених трикутників AO_1D та BO_2D дістаємо, що

$$\angle O_1DA + \angle O_2DB = (90^\circ - \tfrac{1}{2}\angle AO_1D) + (90^\circ - \tfrac{1}{2}\angle BO_2D) = 90^\circ.$$

Звідси $\angle ADB = 90^\circ$, а отже $\angle AFB = 90^\circ$.

II спосіб. Нехай при гомотетії з центром D, яка переводить коло ω_2 у коло ω_1, радіус O_2B переходить у радіус O_1G (рис. 2). Ця гомотетія переводить трикутник BED у трикутник GCD, тому $GC \parallel BE$. Оскільки $O_2B \parallel O_1A$ та $O_2B \parallel O_1G$, то $G - O_1 - A$ — діаметр кола ω_1. Звідси $AC \perp GC$, тобто $AC \perp BE$.

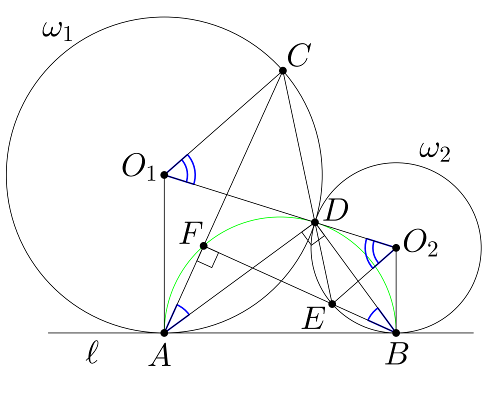


Рис. 1.

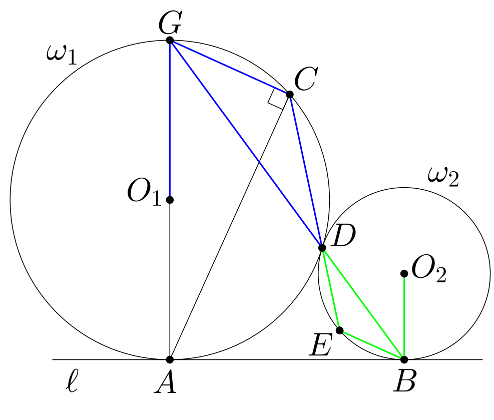


Рис. 2.

□

2. Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC, в якому $\angle A = 60^\circ$, D — точка дотику вписаного кола зі стороною BC. На відрізках BI та CI відмітили точки X та Y так, що $DX \perp AB$ та $DY \perp AC$. Точку Z обрали так, що трикутник XYZ рівносторонній, причому точки Z та I лежать по одну сторону від прямої XY. Доведіть, що $AZ \perp BC$.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання.

Нехай вписане коло трикутника ABC дотикається до сторін AC та AB у точках E та F відповідно (рис. 3). Оскільки $CI \perp ED$, то Y — точка перетину висот трикутника DEC. Тому $EY \perp BC$ та $ID \perp BC$, звідки $EY \parallel ID$. Аналогічно $EI \parallel YD$, тому $EIDY$ паралелограм та $\overrightarrow{EY} = \overrightarrow{ID}$. Так само дістаємо, що $\overrightarrow{FX} = \overrightarrow{ID}$. Рівносторонні трикутники AEF та ZYX подібні та однаково орієнтовні, а при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{EY} = \overrightarrow{FX}$ точки E та F переходять у точки Y та X відповідно.

Тому точка A переходить у точку Z, $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{EY}$, а отже $AZ \perp BC$. $\square$

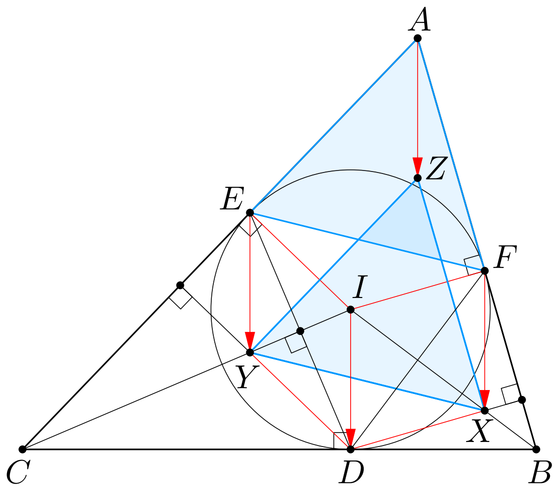
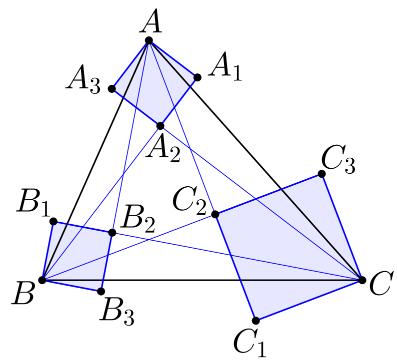


Рис. 3.

3. Дано гострокутний трикутник ABC. Квадрати $AA_1A_2A_3$, $BB_1B_2B_3$ та $CC_1C_2C_3$ розташовані так, що прямі A_1A_2, B_1B_2 та C_1C_2 проходять через точки B, C та A відповідно, а прямі A_2A_3, B_2B_3 та C_2C_3 — через точки C, A та B відповідно. Доведіть, що

а) прямі AA_2, B_1B_3 та C_1C_3 перетинаються в одній точці;

б) прямі AA_2, BB_2 та CC_2 перетинаються в одній точці.



(*Михайло Плотніков*)

Розв'язання.

а) Прямі B_1B_3, AA_2 та C_1C_3 містять бісектриси прямих кутів $\angle BB_1C$, $\angle BA_2C$ та $\angle BC_3C$, тому всі вони проходять через точку A' — середину півкола, побудованого на BC як на діаметрі зовні від трикутника ABC (рис. 4.)

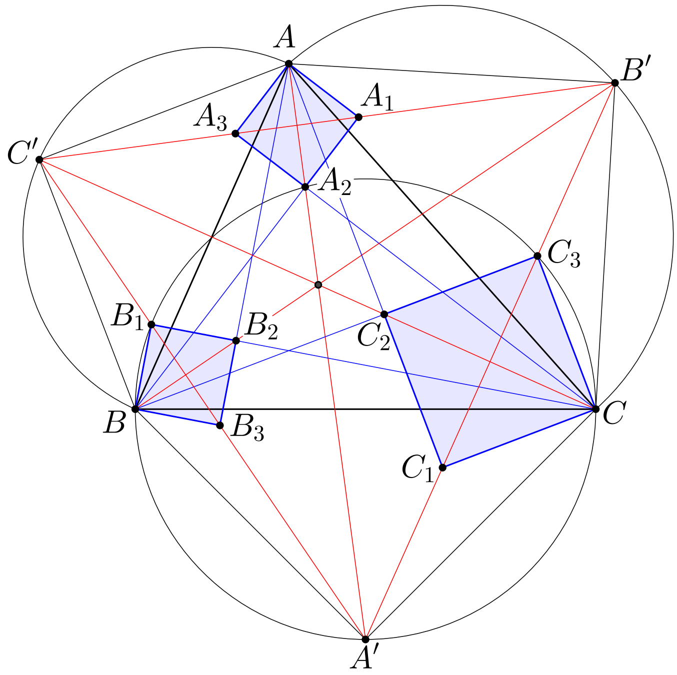


Рис. 4.

б) Нехай A', B' та C' — середини півкіл з діаметрами BC, AC та AB, розташованих зовні трикутника ABC. Внаслідок а) пряма A_1A_3 проходить через точки B' та C', а пряма AA_2 — через точку A'. Оскільки $A_1A_3 \perp AA_2$ як діагоналі квадрата, то пряма AA_2 містить висоту трикутника $A'B'C'$. Прямі BB_2 та CC_2 теж містять висоти трикутника $A'B'C'$, тому прямі AA_2, BB_2 та CC_2 перетинаються в ортоцентрі цього трикутника.

□

4. На півколі з діаметром AB відмітили довільну точку C. Нехай P та Q — точки на відрізку AB, для яких $AP = AC$ та $BQ = BC$, а O та H — центр описаного кола та ортоцентр трикутника CPQ. Доведіть, що при всіх можливих положеннях точки C пряма OH проходить через фіксовану точку.

(*Михайло Сидоренко*)

Розв'язання.

Покажемо, що пряма OH завжди проходить через точку N — середину півкола з діаметром AB (рис. 5).

Спочатку доведемо, що $\angle PCQ = 45°$. Справді, з рівнобедрених трикутників ACP та BCQ дістаємо, що $\angle QPC = 90° - \frac{1}{2}\angle CAB$ та $\angle PQC = 90° - \frac{1}{2}\angle CBA$, а тому

$$\begin{aligned}\angle PCQ &= 180^\circ - \angle QPC - \angle PQC = \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \tfrac{1}{2}\angle CAB) - (90^\circ - \tfrac{1}{2}\angle CBA) = \\ &= \tfrac{1}{2}(\angle CAB + \angle CBA) = 45^\circ.\end{aligned}$$

Звідси $\angle POQ = 2\angle PCQ = 90^\circ$ та POQ — прямокутний рівнобедрений трикутник. Але ANB — теж прямокутний рівнобедрений трикутник, тому трикутники ANB та QOP гомотетичні.

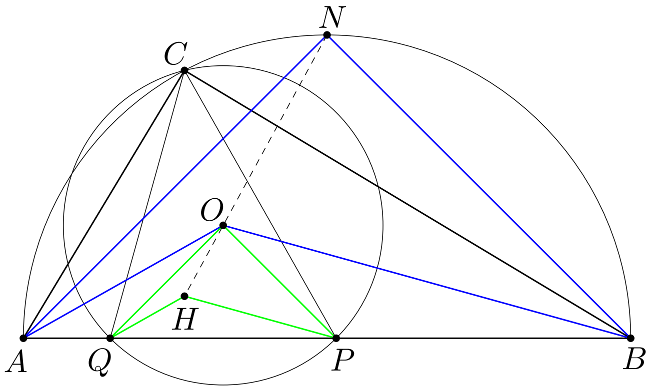


Рис. 5.

Оскільки трикутники ACP та BCQ рівнобедрені, то $AO \perp CP$ та $BO \perp CQ$, звідки $AO \parallel QH$ та $BO \parallel PH$. Тому трикутники AOB та QHP теж гомотетичні. Таким чином, існує гомотетія, яка переводить трикутники ANB та AOB у трикутники QOP та QHP. Ця гомотетія переводить відрізок NO у відрізок OH, а оскільки ці відрізки мають спільну точку, вони лежать на одній прямій. Отже, пряма OH завжди проходить через точку N.

$\square$

5. Дано нерівнобедрений трикутник ABC, у якому відмічено центр вписаного кола I та K_1, K_2 і K_3 — точки дотику вписаного кола зі сторонами BC, AC і AB відповідно. Користуючись лише лінійкою, побудуйте центр кола, описаного навколо трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання. Розіб'ємо побудову на два кроки.

Крок 1. Знаходимо середини сторін трикутника M_1, M_2 та M_3.

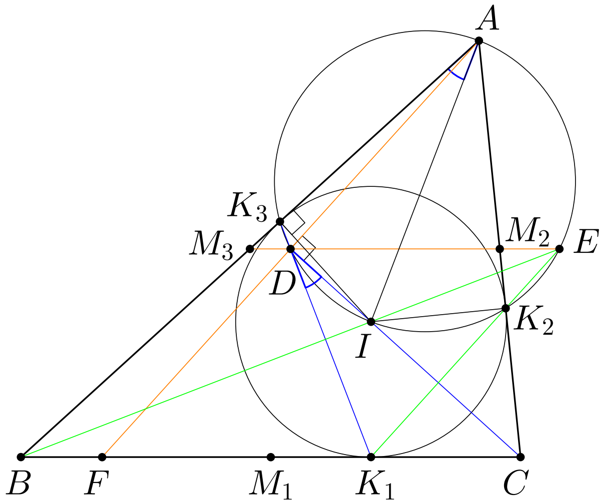


Рис. 6.

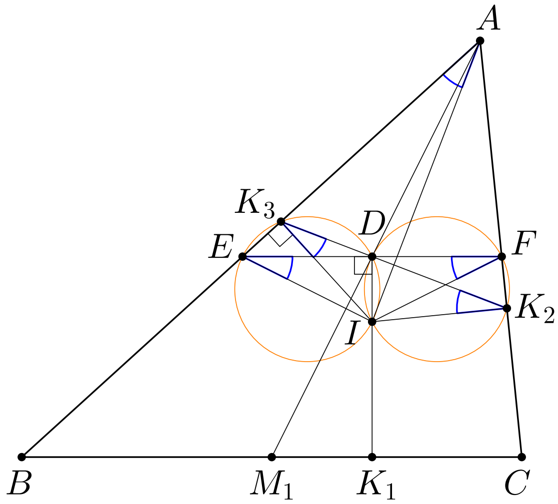


Рис. 7.

I спосіб. Нехай D — точка перетину прямих K_1K_3 та CI. Покажемо, що D лежить на прямій M_2M_3 (рис. 6). Оскільки

$$\angle K_1DC = \angle K_3K_1B - \angle ICB = \frac{\angle A + \angle C}{2} - \frac{\angle C}{2} = \frac{\angle A}{2} = \angle K_3AI,$$

точки A, I, D, K_3 лежать на одному колі. Звідси $\angle IDA = \angle IK_3A = 90^\circ$. Нехай пряма AD перетинає BC у точці F. Тоді CD є бісектрисою та висотою трикутника ACF, отже цей трикутник рівнобедрений. Звідси D — середина AF, а тому лежить на прямій M_2M_3. Нехай тепер E — точка перетину прямих K_1K_2 та BI. Ця точка теж лежить на M_2M_3, тому пряма DE перетинає AB та AC у точках M_3 та M_2. Аналогічно будуємо пряму M_1M_2 та дістаємо точку M_1.

II спосіб. Нехай D — точка перетину прямих K_1I та K_2K_3 (рис. 7). Покажемо, що пряма AD проходить через точку M_1. Для цього проведемо через точку D відрізок $EF \parallel BC$ ($E \in AB$, $F \in AC$) та покажемо, що D — середина EF.

Справді, чотирикутник AK_2IK_3 вписаний у коло з діаметром AI, звідки $\angle IK_3K_2 = \angle IK_2K_3 = \frac{\angle A}{2}$. Оскільки $\angle EK_3I = \angle EDI = 90^\circ$, точки E, K_3, D, I лежать на одному колі та аналогічно точки I, D, F, K_2 лежать на одному колі. Тому

$$\angle IED = \angle IK_3D = \frac{\angle A}{2} = \angle IK_2D = \angle IFD.$$

Отже, трикутник IEF рівнобедрений та його висота ID є медіаною. Аналогічно будуємо точки M_2 та M_3.

Крок 2. Будуємо серединні перпендикуляри до сторін трикутника. Нехай G — точка перетину AM_1 та M_2M_3, а P — точка перетину M_1M_3 та CG (рис. 8). Тоді відрізки M_3G та GM_2 є середніми лініями трикутників M_1PC та BAM_1, звідки $PA \parallel BC$. Нехай Q — точка перетину K_1I та PA, S — точка перетину M_1Q та M_2M_3, T — точка перетину K_1S та PA. Неважко перевірити, що M_1K_1QT —

прямокутник, а тому $M_1T \perp BC$. Аналогічно будуємо серединний перпендикуляр до ще однієї сторони та дістаємо центр описаного кола трикутника ABC.

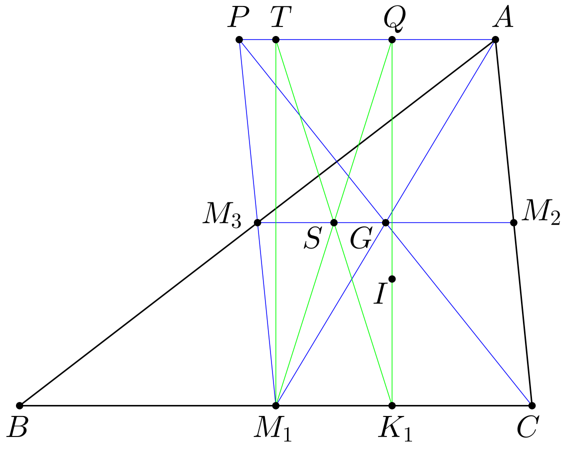


Рис. 8.

□

6. Дано нерівнобедрений трикутник ABC. Через точку B провели пряму ℓ, яка не перетинає трикутник та утворює різні кути зі сторонами AB та BC. Нехай M — середина AC, а H_a та H_c — основи перпендикулярів, проведених з точок A та C до ℓ. Описане коло трикутника MBH_a перетинає AB у точці A_1, а описане коло трикутника MBH_c перетинає BC у точці C_1. Точка A_2 симетрична до A відносно точки A_1, а точка C_2 симетрична до C відносно точки C_1. Доведіть, що прямі ℓ, AC_2 та CA_2 перетинаються в одній точці.

(*Яна Колодач*)

Розв'язання.

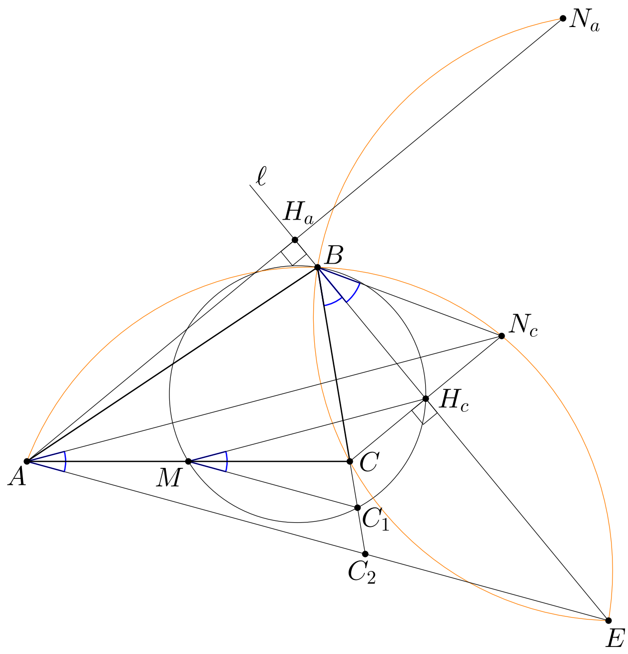


Рис. 9.

Відкладемо на продовженні AH_a відрізок $H_aN_a = AH_a$ та на продовженні CH_c відрізок $H_cN_c = CH_c$ (рис. 9). Зауважимо, що прямі BC та BN_c симетричні відносно ℓ, тому точки A, B та N_c не лежать на одній прямій. Нехай описане коло трикутника ABN_c вдруге перетинає пряму ℓ у точці E.

Покажемо, що пряма AC_2 проходить через точку E. Справді[1],

$$\angle N_cAE = \angle N_cBE = \angle N_cBH_c = \angle H_cBC_1 = \angle H_cMC_1.$$

Оскільки MH_c та MC_1 — середні лінії трикутників ACN_c та ACC_2, то

$$\angle N_cAC_2 = \angle H_cMC_1 = \angle N_cAE,$$

отже пряма AC_2 проходить через точку E. Аналогічно пряма A_2C проходить через точку перетину описаного кола трикутника N_aBC з прямою ℓ, відмінну від B. Але трикутники ABN_c та N_aBC симетричні відносно прямої ℓ. Тому описане коло трикутника N_aBC також перетинає пряму ℓ у точці E, що завершує доведення. □

[1]для розташування точок, зображеного на рис. 9; в інших випадках викладки є цілком аналогічними.