IX Геометрична олімпіада імені В. А. Ясінського

9 листопада 2025 року

8 клас

1. Дано трикутник ABC. На стороні BC відмітили точку D, а всередині трикутника точку E так, що $\angle BAD = \angle ECD$ та $\angle DEC = \angle ABC$. Доведіть, що $\angle BEC = 180^\circ - \angle BAC$.

2. На стороні AC трикутника ABC відмітили таку точку D, що $BD = CD$, а на відрізку BD таку точку E, що $CE = AB$. Виявилося, що $AB + BE = AC$. Знайдіть $\angle BAC$.

3. Нехай M — середина сторони BC трикутника ABC, а P та Q — середини висот BE та CF відповідно. Відновіть трикутник ABC, якщо дано лише точки M, P та Q.

4. Нехай O — центр описаного кола гострокутного трикутника ABC. На сторонах AB та AC відмітили точки D та E відповідно так, що відрізок DE проходить через точку O. Нехай K та L — ортоцентри трикутників BOD та COE відповідно, а T — точка перетину прямих KD та LE. Доведіть, що точки A, K, T та L лежать на одному колі.

5. Нехай ABC — гострокутний трикутник з ортоцентром H та центром описаного кола O. На стороні BC знайшлася така точка P, що $OP = OH$ та $HP = AH$. Доведіть, що точка P лежить на прямій AO або на прямій AH.

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

IX Геометрична олімпіада імені В. А. Ясінського

9 листопада 2025 року

9 клас

1. Дано вписаний чотирикутник $ABCD$. На стороні AD знайшлися точки K та L такі, що $AK = BK$ та $CL = DL$, причому точки A, K, L, D лежать на прямій саме у такому порядку. Точка M є такою, що $KM \parallel AB$ та $LM \parallel CD$. Доведіть, що $BM = CM$.

2. Дано трикутник ABC. На промені AC відмітили точку P, а на промені BC — точку Q так, що описані кола трикутників ACQ та BCP дотикаються до AB. Нехай O — центр описаного кола трикутника PCQ. Доведіть, що $AO = BO$.

3. Нехай BE та CF — бісектриси трикутника ABC. На продовженні EF за точку F відмітили точку P так, що $AB = BP$, а на продовженні FE за точку E відмітили точку Q так, що $AC = CQ$. Доведіть, що $\angle BPQ = \angle CQP$.

4. Нехай $ABCD$ — вписаний чотирикутник, у якому $AD \nparallel BC$. На сторонах AB та CD відмітили точки X та Y відповідно так, що $AX/XB = CY/YD$. Точки P та Q симетричні точці X відносно AD та BC відповідно. Доведіть, що $PY = QY$.

5. Нехай O — центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника ABC $(AB = AC)$, K — середина дуги AB, що не містить точку C, T — точка на прямій BO така, що $\angle KAT = 90°$, та E — середина AC. Доведіть, що $\angle KET = 90°$.

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

IX Геометрична олімпіада імені В. А. Ясінського

9 листопада 2025 року

10 – 11 класи

1. Нехай ω — вписане коло трикутника ABC, у якому $AB = AC = 2BC$, I — центр ω, K — точка дотику ω зі стороною AC та F — друга точка перетину BK з колом ω. Доведіть, що точки A, I, F та B лежать на одному колі.

2. Нехай O — центр описаного кола гострокутного трикутника ABC. На сторонах AB та AC відмітили точки K та L відповідно так, що $OK = BK$ та $OL = CL$. Описані кола трикутників ABC та AKL вдруге перетинаються у точці T. Доведіть, що $AT \parallel BC$.

3. Дано трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$). На стороні CD відмітили точку K та вписали у трикутники BCK та ADK кола з центрами I та J відповідно. Знайдіть усі трапеції $ABCD$, для яких може виявитися, що обидва многокутники $ABIKJ$ та $DCIJ$ вписані.

4. Нехай ABC — трикутник, у якому $AB \neq AC$. На сторонах BC, AC та AB відмітили точки D, E та F відповідно так, що чотирикутник $BFEC$ вписаний та описане коло трикутника DEF дотикається до BC у точці D. На прямій AD знайшлася така точка Q, що $BQ = CQ$, причому точки A та Q лежать по різні сторони від BC. Доведіть, що

$$\angle BAC + \angle EDF + \angle BQC = 180^\circ.$$

5. Всередині гострокутного нерівнобедреного трикутника ABC обрали точку D так, що $\angle ABD = \angle ACD$. Коло з діаметром AD вдруге перетинає описане коло трикутника ABC у точці K та висоту AH у точці E. Доведіть, що пряма KE проходить через середину сторони BC.

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.