Розв'язання і вказівки
8 клас

1. Дано трикутник ABC. На стороні BC відмітили точку D, а всередині трикутника точку E так, що $\angle BAD = \angle ECD$ та $\angle DEC = \angle ABC$. Доведіть, що $\angle BEC = 180^\circ - \angle BAC$.

(*Георгій Жилінський*)

Розв'язання. I спосіб. Нехай пряма AD перетинає описане коло трикутника ABC у точці F (рис. 1). Тоді $\angle BCF = \angle BAF = \angle ECD$ та $\angle AFC = \angle ABC = \angle ECD$. Отже, у трикутниках DCE та DCF є дві пари рівних кутів, тому треті кути цих трикутників теж рівні. Звідси випливає, що трикутники DCE та DCF рівні за стороною та прилеглими кутами. Тому $CE = CF$. Тепер трикутники BCE та BCF рівні за двома сторонами і кутом між ними, тому $\angle BEC = \angle BFC = 180^\circ - \angle BAC$.

II спосіб. Нехай пряма CE перетинає сторону AB у точці G (рис. 2). Оскільки $\angle GAD = \angle GCD$, то чотирикутник $GACD$ вписаний, а оскільки

$$\angle GED = 180^\circ - \angle DEC = 180^\circ - \angle GBD,$$

то чотирикутник $GBDE$ вписаний. Тому

$$180^\circ - \angle BEC = \angle GEB = \angle GDB = 180^\circ - \angle GDC = \angle BAC.$$

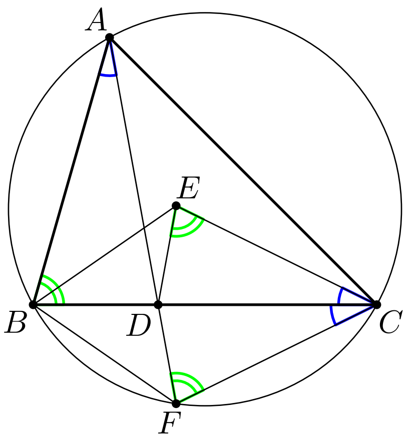

Рис. 1.

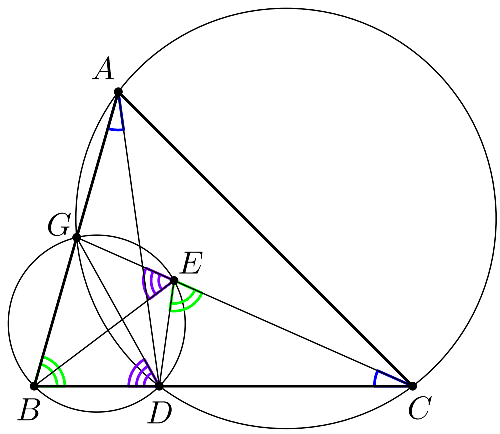

Рис. 2.

2. На стороні AC трикутника ABC відмітили таку точку D, що $BD = CD$, а на відрізку BD таку точку E, що $CE = AB$. Виявилося, що $AB + BE = AC$. Знайдіть $\angle BAC$. (*Георгій Жилінський*)

Розв'язання. Оскільки трикутник BDC рівнобедрений, то $\angle DBC = \angle DCB$. Відкладемо на стороні AC відрізок $CF = BE$ (рис. 3). Трикутники BCE та CBF рівні за двома сторонами і кутом між ними, отже $BF = CE = AB$. Також

$$AF = AC - CF = AC - BE = AB.$$

Таким чином, трикутник ABF рівносторонній, а отже $\angle BAC = 60^\circ$.

Відповідь: $\angle BAC = 60^\circ$.

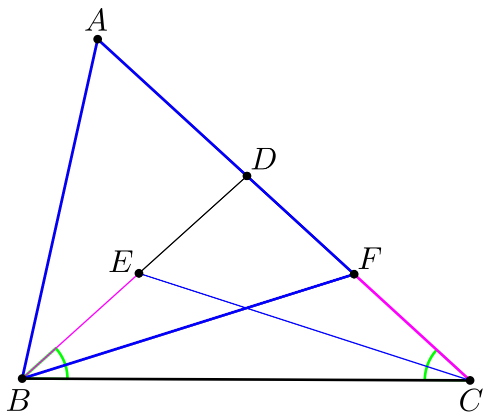

Рис. 3.

3. Нехай M — середина сторони BC трикутника ABC, а P та Q — середини висот BE та CF відповідно. Відновіть трикутник ABC, якщо дано лише точки M, P та Q. (*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання. Оскільки MP та MQ — середні лінії трикутників BEC та BFC, то $MP \parallel CE$ та $MQ \parallel BF$, тому $\angle BPM = \angle CQM = 90°$. Розглянемо таку точку T, що M є серединою відрізка TQ (рис. 4). Трикутники BMT та CMQ рівні за двома сторонами та кутом між ними, тому $\angle BTM = \angle CQM = 90°$. Звідси випливає така побудова:

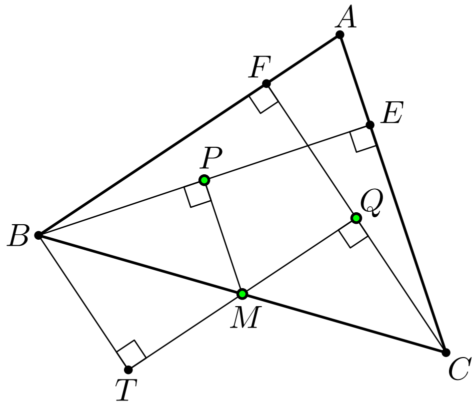

Рис. 4.

1) Відкладаємо на продовженні QM відрізок $MT = QM$.

2) Проводимо перпендикуляри в точці P до MP та в точці T до MT, вони перетинаються у точці B.

3) Відкладаємо на продовженні BM відрізок $MC = BM$.

4) Опускаємо перпендикуляри з точки B на CQ та з точки C на BP, вони перетинаються у точці A.

4. Нехай O — центр описаного кола гострокутного трикутника ABC. На сторонах AB та AC відмітили точки D та E відповідно так, що відрізок DE проходить через точку O. Нехай K та L — ортоцентри трикутників BOD та COE відповідно, а T — точка перетину прямих KD та LE. Доведіть, що точки A, K, T та L лежать на одному колі.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання. Оскільки трикутник AOB рівнобедрений, то $\angle OAD = \angle OBD$, а оскільки $OK \perp BD$ та $KD \perp BO$, то $\angle OKD = \angle OBD$. Отже, $\angle OAD = \angle OKD$, а тому точки O, A, K, D лежать на одному колі (рис. 5). Аналогічно точки O, A, L, E лежать на одному колі. Звідси дістаємо[1]

$$\angle KAL = \angle KAO + \angle LAO = \angle TDO + \angle TEO = 180° - \angle DTE = 180° - \angle KTL,$$

тобто чотирикутник $AKTL$ вписаний.

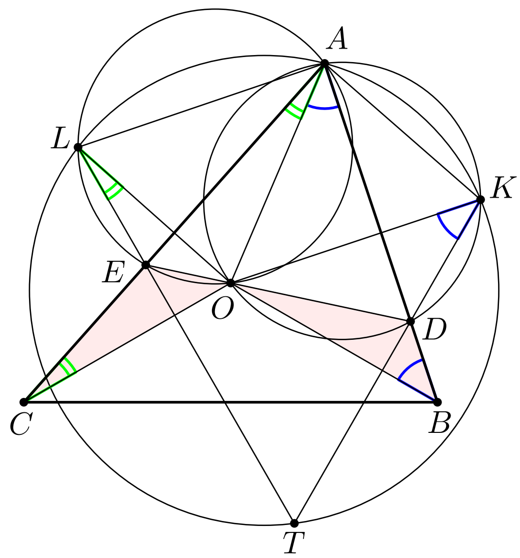

Рис. 5.

[1]для розташування точок, зображеного на рис. 5; в інших випадках викладки є цілком аналогічними.

5. Нехай ABC — гострокутний трикутник з ортоцентром H та центром описаного кола O. На стороні BC знайшлася така точка P, що $OP = OH$ та $HP = AH$. Доведіть, що точка P лежить на прямій AO або на прямій AH. (*Михайло Сидоренко*)

Розв'язання. Відкладемо на продовженні висоти AD відрізок $DN = HD$. Тоді пряма BC є серединним перпендикуляром до HN, отже $NP = HP = AH$ та $CH = CN$. Оскільки $\angle DHC = \angle ABC$ (кут між висотами трикутника), то і $\angle ANC = \angle DHC = \angle ABC$, отже точка N лежить на описаному колі трикутника ABC. Таким чином, $ON = OA$ як радіуси, а також $OP = OH$ та $NP = AH$. Тому трикутники ONP та OAH рівні за трьома сторонами. Позначимо $\angle OAH = \angle ONA = \alpha$. Тоді $\angle ONP = \angle OAH = \alpha$.

Якщо точки P та A лежать по одну сторону від ON, звідси випливає, що P лежить на промені NA (рис. 6 а).

Надалі будемо вважати, що точки P та A лежать по різні сторони від ON (рис. 6 б). Тоді $\angle PHN = \angle PNH = 2\alpha$. Тому кут при основі рівнобедреного трикутника AHP дорівнює $\angle PAH = \alpha$, отже P лежить на промені AO.

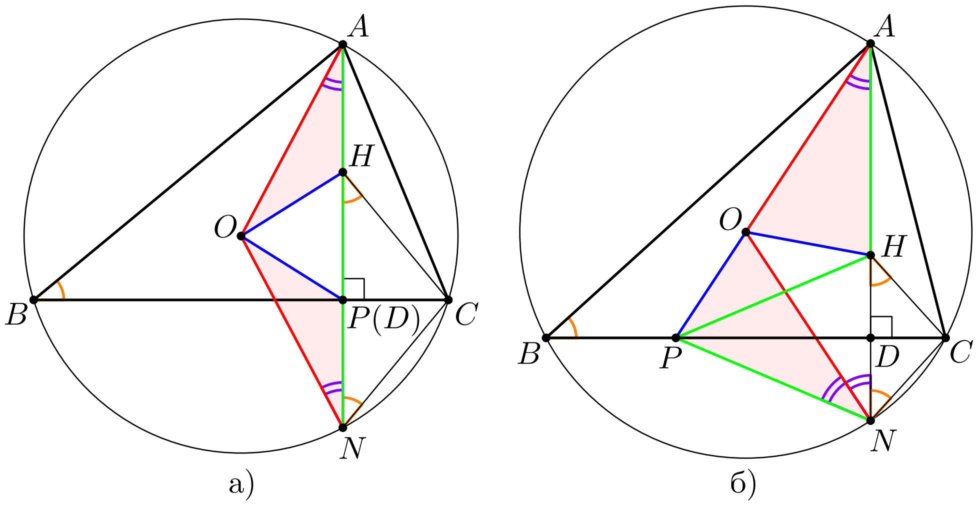

Рис. 6.

9 клас

1. Дано вписаний чотирикутник $ABCD$. На стороні AD знайшлися точки K та L такі, що $AK = BK$ та $CL = DL$, причому точки A, K, L, D лежать на прямій саме у такому порядку. Точка M є такою, що $KM \parallel AB$ та $LM \parallel CD$. Доведіть, що $BM = CM$.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання. Нехай O — центр кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$, OE та OG — серединні перпендикуляри до AB та CD, а F — точка перетину прямої OM з BC (рис. 1). Оскільки точки K та L лежать на OE та OG, а $KM \parallel AB$ та $LM \parallel CD$, то $\angle OKM = \angle OLM = 90°$. Тому чотирикутник $OKML$ вписаний.

Позначимо $\angle BAD = \alpha$. Тоді $\angle MKL = \alpha$, бо $KM \parallel AB$, та $\angle MOL = \angle MKL = \alpha$, бо чотирикутник $OKML$ вписаний. Тепер у чотирикутнику $FOGC$ маємо $\angle FOG = \alpha$, $\angle FCG = \angle BCD = 180° - \alpha$ та $\angle OGC = 90°$. Звідси $\angle OFC = 90°$. Таким чином, OF — серединний перпендикуляр до BC, а оскільки точка M лежить на OF, то $BM = CM$.

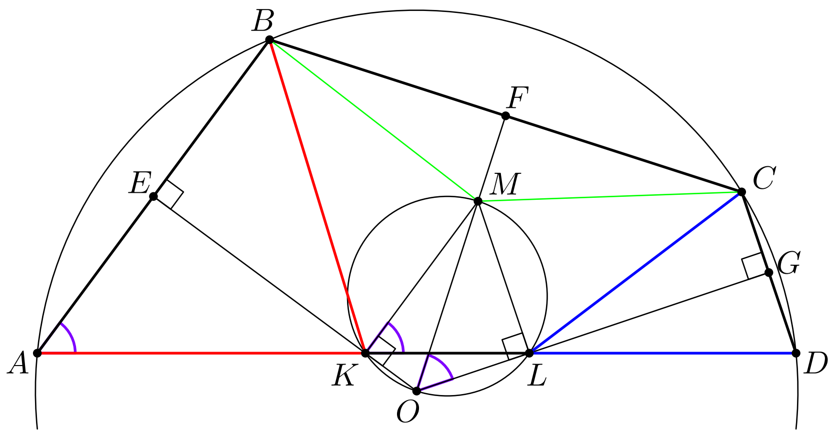

Рис. 1.

2. Дано трикутник ABC. На промені AC відмітили точку P, а на промені BC — точку Q так, що описані кола трикутників ACQ та BCP дотикаються до AB. Нехай O — центр описаного кола трикутника PCQ. Доведіть, що $AO = BO$. (*Володимир Пригунов*)

Розв'язання. Нехай радіус описаного кола трикутника PCQ дорівнює R. За властивістю січних та дотичних до кола дістаємо (рис. 2)

$$(AO - R)(AO + R) = AC \cdot AP = AB^2,$$
$$(BO - R)(BO + R) = BC \cdot BQ = AB^2.$$

Тому $AO^2 - R^2 = BO^2 - R^2$, тобто $AO = BO$.

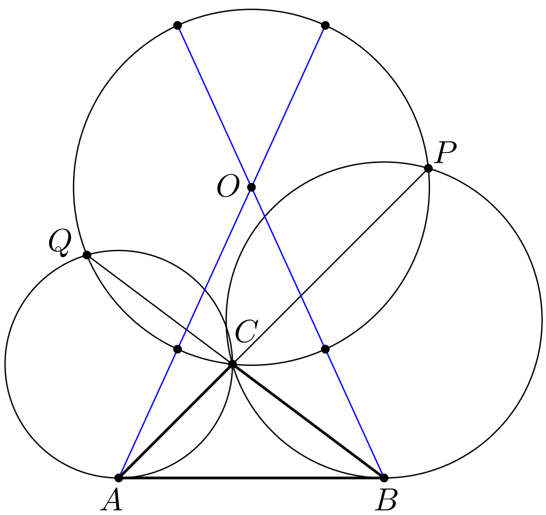

Рис. 2.

3. Нехай BE та CF — бісектриси трикутника ABC. На продовженні EF за точку F відмітили точку P так, що $AB = BP$, а на продовженні FE за точку E відмітили точку Q так, що $AC = CQ$. Доведіть, що $\angle BPQ = \angle CQP$. (*Георгій Жилінський*)

Розв'язання. Відмітимо на прямій EF точки K та L так, що $AK \parallel BP$ та $AL \parallel CQ$ (рис. 3). Позначимо $BC = a$, $AC = b$ та $AB = c$. За властивістю бісектриси $AF/FB = b/a$, а оскільки трикутники PBF та KAF подібні, то $AK/BP = AF/BF = b/a$. Отже, $AK = BP \cdot \frac{b}{a} = \frac{bc}{a}$. Аналогічно $AL = \frac{bc}{a}$. Отже, трикутник AKL рівнобедрений, звідки

$$\angle BPQ = \angle AKL = \angle ALK = \angle CQP.$$

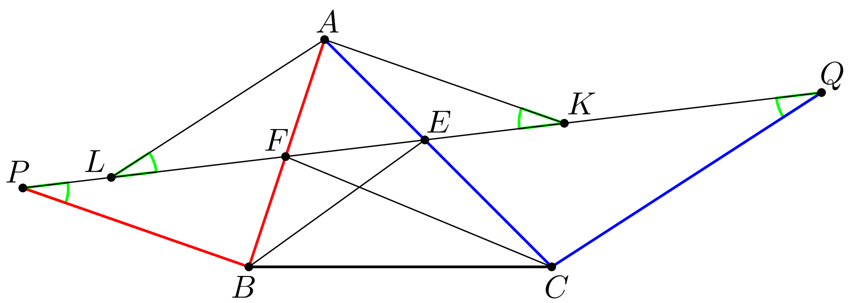

Рис. 3.

4. Нехай $ABCD$ — вписаний чотирикутник, у якому $AD \nparallel BC$. На сторонах AB та CD відмітили точки X та Y відповідно так, що $AX/XB = CY/YD$. Точки P та Q симетричні точці X відносно AD та BC відповідно. Доведіть, що $PY = QY$. (*Георгій Жилінський*)

Розв'язання. Нехай для визначеності промені AD та BC перетинаються у точці O. Оскільки AD та BC є серединними перпендикулярами до XP та XQ, точка O є центром описаного кола трикутника PXQ (рис. 4). Позначимо Y' точку перетину серединного перпендикуляра до PQ з прямою CD і доведемо, що $Y' = Y$. Звідси випливатиме, що $PY = QY$.

Оскільки OA, OB та OY' є бісектрисами кутів POX, XOQ та POQ відповідно, то промінь OY' лежить між OA та OB, а тому точка Y' лежить на відрізку CD. Трикутники OAB та OCD подібні. Покажемо, що $\angle AOX = \angle COY'$. Справді, $\angle AOX = \frac{1}{2}\angle POX = \angle PQX$, а оскільки $PQ \perp OY'$ та $QX \perp OC$, то $\angle COY' = \angle PQX = \angle AOX$. Отже, X та Y' — відповідні точки у подібних трикутниках OAB та OCD. Звідси $CY'/Y'D = AX/XB = CY/YD$. Таким чином, $Y' = Y$.

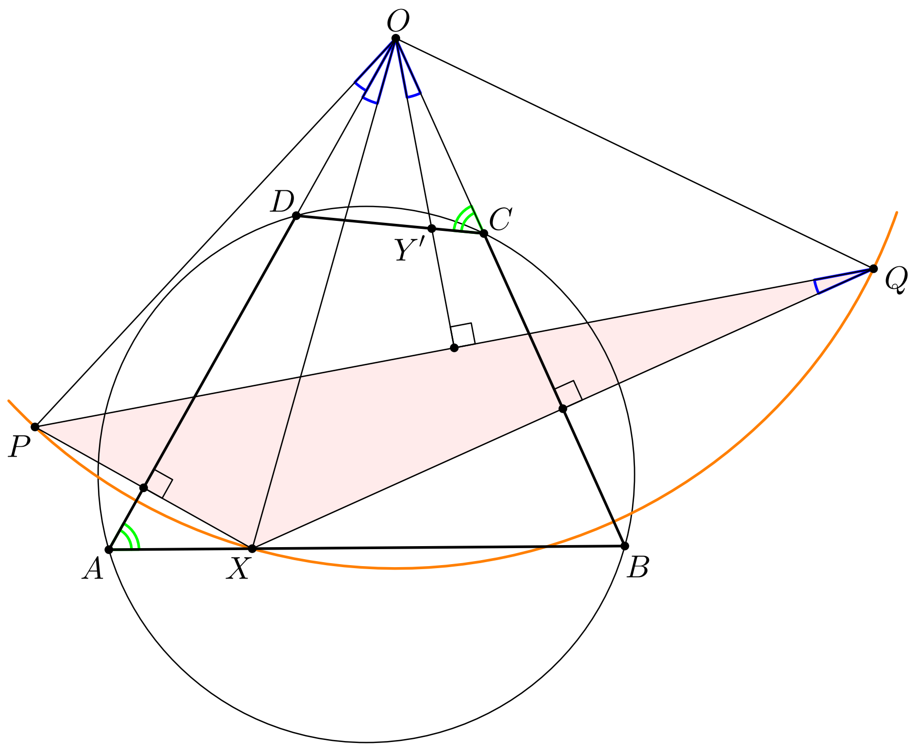

Рис. 4.

5. Нехай O — центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника ABC $(AB = AC)$, K — середина дуги AB, що не містить точку C, T — точка на прямій BO така, що $\angle KAT = 90^\circ$, та E — середина AC. Доведіть, що $\angle KET = 90^\circ$.

(*Павло Проценко та Ангеліна Шкуринська*)

Розв'язання. Відмітимо на прямій BO точку D так, що $KD \perp BO$ (рис. 5). Тоді точки K, A, T, D лежать на колі з діаметром KT. Покажемо, що точка E теж лежить на цьому колі, звідки $\angle KET = 90^\circ$.

Оскільки OK є бісектрисою кута AOB, то $\angle KOB = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB < 90^\circ$. Тому точка D лежить на промені OB та $\angle KOD = \angle KOB = \frac{1}{2}\angle AOB$. Аналогічно OE є бісектрисою кута AOC та $\angle AOE = \frac{1}{2}\angle AOC$, тому $\angle KOD = \angle AOE$. Оскільки $OK = OA$ як радіуси, прямокутні трикутники KOD та AOE рівні за гіпотенузою та гострим кутом. Отже, $KD = AE$ та $\angle DKO = \angle EAO$. Трикутник KOA рівнобедрений, тому $\angle OKA = \angle OAK$. Таким чином, $\angle DKA = \angle DKO + \angle OKA = \angle EAO + \angle OAK = \angle EAK$. Звідси випливає, що $DKAE$ — рівнобічна трапеція. Тому точка E лежить на описаному колі трикутника KAD, що завершує доведення.

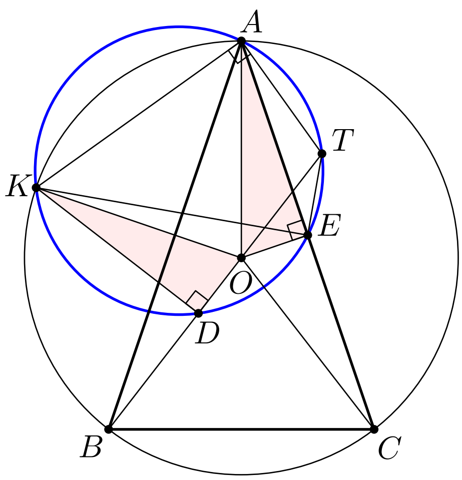

Рис. 5.

10 – 11 класи

1. Нехай ω — вписане коло трикутника ABC, у якому $AB = AC = 2BC$, I — центр ω, K — точка дотику ω зі стороною AC та F — друга точка перетину BK з колом ω. Доведіть, що точки A, I, F та B лежать на одному колі.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання. Оскільки $KC = \frac{1}{2}(AC+BC-AB) = \frac{1}{2}BC$, то $KC/BC = BC/AC$, отже трикутники ABC та BKC подібні (рис. 1). Покладемо $\angle BAC = 2\alpha$. Тоді

$$\angle CKB = \angle ABC = 90° - \alpha.$$

Оскільки $\angle IKC = 90°$, то

$$\angle IKF = \angle IKC - \angle CKB = 90° - (90° - \alpha) = \alpha.$$

Трикутник IKF рівнобедрений, тому $\angle IFK = \angle IKF = \alpha$. Звідси $\angle IAB + \angle IFB = \alpha + (180° - \alpha) = 180°$, тобто чотирикутник $AIFB$ вписаний.

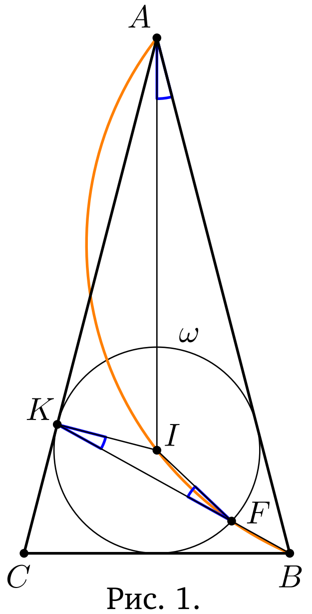

Рис. 1.

2. Нехай O — центр описаного кола гострокутного трикутника ABC. На сторонах AB та AC відмітили точки K та L відповідно так, що $OK = BK$ та $OL = CL$. Описані кола трикутників ABC та AKL вдруге перетинаються у точці T. Доведіть, що $AT \parallel BC$.

(*Матвій Курський*)

Розв'язання. Позначимо R радіус описаного кола трикутника ABC. Оскільки трикутники AOB та BOK рівнобедрені та мають спільний кут при вершині B, то вони подібні. Звідси $AB/BO = BO/BK$, тобто $AB \cdot BK = BO^2 = R^2$. Аналогічно $AC \cdot CL = R^2$. Добудуємо трикутник ABC до рівнобічної трапеції $ABCD$ та відмітимо на стороні CD точку E так, що $CE = BK$ (рис. 2) Оскільки $CD \cdot CE = AB \cdot BK = AC \cdot CL$, точки D, E, A та L лежать на одному колі, а оскільки $ADEK$ рівнобічна трапеція, це коло проходить і через точку K, тобто є описаним колом трикутника AKL. Тому $T = D$, звідки $AT \parallel BC$.

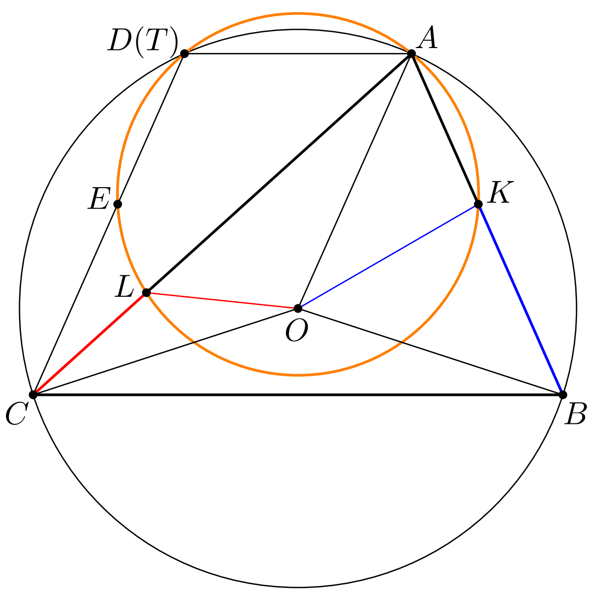

Рис. 2.

3. Дано трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$). На стороні CD відмітили точку K та вписали у трикутники BCK та ADK кола з центрами I та J відповідно. Знайдіть усі трапеції $ABCD$, для яких може виявитися, що обидва многокутники $ABIKJ$ та $DCIJ$ вписані.

(*Володимир Брайман та Олександр Толесніков*)

Розв'язання. Позначимо кути трапеції $\angle BCD = \gamma$ та $\angle CDA = \delta$, $\gamma + \delta = 180°$. Тоді $\angle BIK = 90° + \frac{\gamma}{2}$ та $\angle AJK = 90° + \frac{\delta}{2}$. Оскільки п'ятикутник $ABIKJ$ вписаний, то

$$\angle BAK = 180° - \angle BIK = 90° - \tfrac{\gamma}{2} \text{ та } \angle ABK = 180° - \angle AJK = 90° - \tfrac{\delta}{2}.$$

Тому $\angle BAK + \angle ABK = 180° - \frac{\gamma+\delta}{2} = 90°$. Таким чином, трикутник ABK прямокутний.

Оскільки $\angle KIC = 90° + \frac{1}{2}\angle CBK$ та $\angle JIK = \angle JAK = \frac{1}{2}\angle DAK$, то

$$\angle JIC = \angle KIC + \angle JIK = 90° + \tfrac{1}{2}(\angle CBK + \angle DAK).$$

Але $\angle CBK + \angle DAK = 180° - (\angle ABK + \angle BAK) = 90°$. Тому $\angle JIC = 135°$. а оскільки чотирикутник $DCIJ$ вписаний, то $\angle CDJ = \frac{\delta}{2} = 45°$. Звідси $\gamma = \delta = 90°$, тобто трапеція $ABCD$ прямокутна.

Оскільки $\angle JIC = 135°$ та $\angle ICD = \frac{\gamma}{2} = 45°$, вписаний чотирикутник $DCIJ$ є рівнобічною трапецією, звідки $CI = DJ$. Прямокутні трикутники BCK та KDA подібні, бо $\angle KBC = \angle AKD$ як кути із взаємно перпендикулярними сторонами. Оскільки CI та DJ — відповідні відрізки у цих трикутниках, то насправді ці трикутники рівні. Таким чином,

$$CD = CK + KD = AD + BC.$$

Тепер покажемо, що довільна трапеція $ABCD$, в якій $\angle C = \angle D = 90°$ та $CD = AD+BC$, є шуканою. Для цього відмітимо на стороні CD точку K так, що $CK = AD$ та $KD = BC$ (рис. 3). Прямокутні трикутники BCK та KDA рівні за двома катетами, звідки $CI = DJ$ та ABK — прямокутний рівнобедрений трикутник. Оскільки $\angle ICD = \angle CDJ = 45°$, чотирикутник $DCIJ$ є рівнобічною трапецією, а отже вписаний. А оскільки $\angle BAK = \angle ABK = 45°$ та $\angle BIK = \angle AJK = 135°$, чотирикутники $ABIK$ та $ABKJ$ вписані, звідки п'ятикутник $ABIKJ$ вписаний.

Відповідь: $ABCD$ — довільна трапеція, в якій $\angle C = \angle D = 90°$ та $CD = AD + BC$.

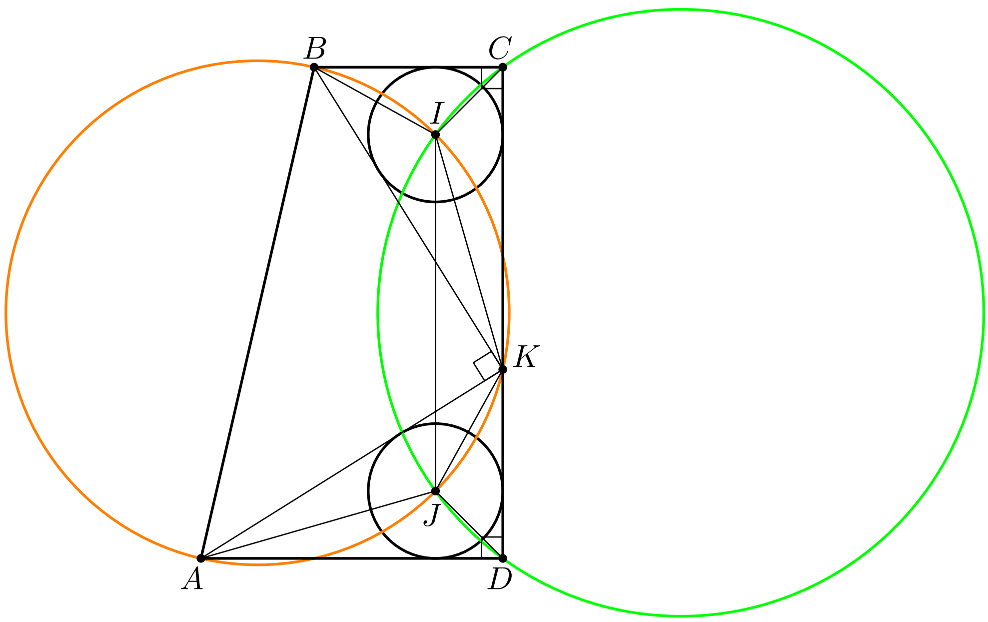

Рис. 3.

4. Нехай ABC — трикутник, у якому $AB \neq AC$. На сторонах BC, AC та AB відмітили точки D, E та F відповідно так, що чотирикутник $BFEC$ вписаний та описане коло трикутника DEF дотикається до BC у точці D. На прямій AD знайшлася така точка Q, що $BQ = CQ$, причому точки A та Q лежать по різні сторони від BC. Доведіть, що $\angle BAC + \angle EDF + \angle BQC = 180°$. (*Антон Тригуб*)

Розв'язання. Оскільки $\angle BFE = 180° - \angle ECB$ та $\angle EFD = \angle EDC$, то

$$\angle BFD = \angle BFE - \angle EFD = 180° - \angle ECD - \angle EDC = \angle DEC.$$

Позначимо $\angle BFD = \angle DEC = \alpha$. Тоді

$$\angle BFD = \angle BAD + \angle ADF = \alpha \text{ та } \angle DEC = \angle DAC + \angle ADE = \alpha,$$

звідки $\angle BAC + \angle EDF = 2\alpha$. Залишається показати, що $\angle BQC = 180° - 2\alpha$. Нехай описане коло трикутника BFD вдруге перетинає пряму AD у точці P. Тоді

$$AE \cdot AC = AF \cdot AB = AP \cdot AD,$$

отже описане коло трикутника DEC теж проходить через точку P.

Якщо точки A та P лежать по одну сторону від BC, то $\angle BPD = \angle BFD = \alpha$ та $\angle DPC = \angle DEC = \alpha$ (рис. 4). Таким чином, пряма AD містить бісектрису кута BPC. Нехай ця пряма вдруге перетинає описане коло трикутника BPC у точці W. Тоді W — середина дуги $\smile BWC$ та $BW = CW$, причому $\angle BWC = 180° - \angle BPC = 180° - 2\alpha$. Залишається зауважити, що $Q = W$, бо інакше пряма AD була би серединним перпендикуляром до BC, що суперечить умові $AB \neq AC$.

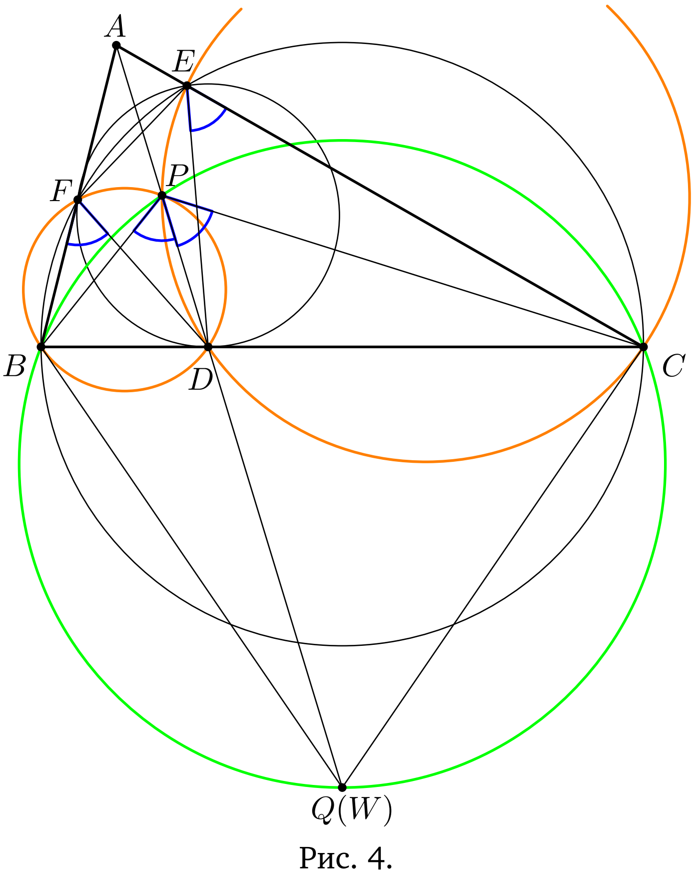

Рис. 4.

Якщо точки A та P лежать по різні сторони від BC, то аналогічно дістаємо, що Q є точкою перетину описаного кола трикутника BPC з прямою AD, але у цьому випадку точки A та Q лежать по одну сторону від BC, що суперечить умові.

Якщо ж $P = D$, то пряма AD є спільною дотичною до описаних кіл трикутників BFD та DEC. Тому $\angle BDQ = \angle BFD = \alpha$, $\angle CDQ = \angle DEC = \alpha$. Звідси $\alpha = 90^\circ$ та $DQ \perp BC$. Оскільки $BW = CW$, пряма $A - D - W$ є серединним перпендикуляром до BC, що суперечить умові $AB \neq AC$.

5. Всередині гострокутного нерівнобедреного трикутника ABC обрали точку D так, що $\angle ABD = \angle ACD$. Коло з діаметром AD вдруге перетинає описане коло трикутника ABC у точці K та висоту AH у точці E. Доведіть, що пряма KE проходить через середину сторони BC. (*Михайло Баркулов*)

Розв'язання. Будемо для визначеності вважати, що точки розташовані як на рис. 5. Нехай M — середина BC, а коло з діаметром AD перетинає сторони AB та AC у точках P та Q відповідно. Тоді трикутники BPD та CQD прямокутні. За умовою $\angle PBD = \angle QCD$, тому ці трикутники подібні, звідки $PD/QD = BP/CQ$.

Трикутники KPB та KQC подібні, оскільки $\angle KBP = \angle KBA = \angle KCA = \angle KCQ$ та $\angle KPB = 180^\circ - \angle KPA = 180^\circ - \angle KQA = \angle KQC$. Звідси $KP/KQ = BP/CQ = KB/KC$ та $\angle PKQ = \angle BKC$, тому трикутники PKQ та BKC теж подібні.

Проведемо у колі з діаметром AD хорду $DL \parallel PQ$ і позначимо G точку перетину діагоналей чотирикутника $KQLP$. Покажемо, що G є серединою відрізка PQ. Справді, оскільки $PD = QL$ та $QD = PL$, то

$$QL/PL = PD/QD = BP/CQ = KP/KQ,$$

тобто $KP \cdot PL = KQ \cdot QL$. Але $\angle KQL = 180^\circ - \angle KPL$, тому

$$S_{KPL} = \tfrac{1}{2} KP \cdot PL \sin \angle KPL = \tfrac{1}{2} KQ \cdot QL \sin \angle KQL = S_{KQL}.$$

Отже, трикутники KPL та KQL мають спільну сторону KL та рівні площі. Тому точки P та Q знаходяться на однакових відстанях від прямої KL по різні сторони від неї, а тому середина PQ лежить на KL, тобто G — середина PQ.

Трикутники PKQ та BKC подібні, а KG та KM — їхні медіани, тому $\angle KGP = \angle KMB$. Але $\angle KGP = \frac{1}{2}(\smile KP + \smile QL) = \frac{1}{2}(\smile KP + \smile PD) = \angle KED$. Отже, $\angle KMB = \angle KED$. Оскільки $DE \perp AH$ та $BC \perp AH$, то $DE \parallel BC$. Якщо пряма KE перетинає BC у точці M', то $\angle KM'B = \angle KED = \angle KMB$. Звідси $M' = M$, що завершує доведення.

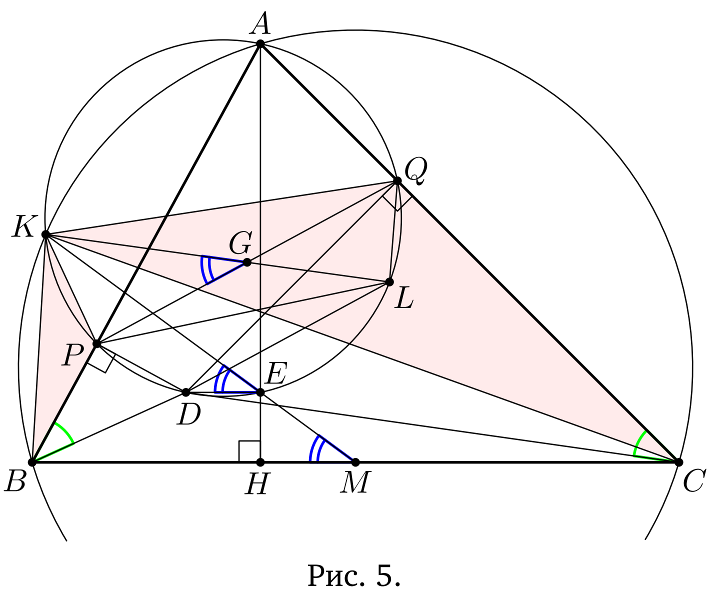

Рис. 5.